Problemas – Tema 1

CCSS Problemas - 11a - derivabilidad en funciones definidas a trozos

1. ¿Para qué valores de a y b la siguiente función es derivable en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^3-x & si & x\leq 0 \\ a\,x+b & si & x>0 \end{Bmatrix}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, tiene que ser en primer lugar continua en todo $\mathbb{R}$.

La función es continua y derivable en los intervalos abiertos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$ por ser polinómica.

Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$$\exists\ f(x_0),\, x_0\in Dom(f)$$
$$\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$
$$f(x_0)=L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$$f(x)\, sea\ continua\ en\, x_0$$
$$f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$$

Continuidad en punto frontera $x=0$:

$$f(0)=0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=b\ \rightarrow\ b=0$$

$f(0)=L \Rightarrow\ 0=0$ → La función es continua en $x=0$ si $b=0$

Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-1 & si\quad x<0 \\ a\quad si & x>0 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Derivabilidad en el punto frontera $x=0$:

$f'(0^-)=-1 \quad , \quad f'(0^+)=a \quad \rightarrow \quad a=-1$

Si $b=0$ la función es continua en toda la recta real y si además $a=-1$ la función es derivable en todo su dominio.

2. Obtener el valor de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b-1 & si \quad x<2 \\ \ln(x-1) & si \quad x\geq 2 \end{cases}$ sea derivable en $x=2$.

Una función a trozos es derivable en un punto frontera si cumple las condiciones de continuidad y de suavidad (también llamadas de derivabilidad).

Las condiciones de continuidad en un punto frontera son las siguientes:

$$\exists f(2)=\ln(2-1)=\ln(1)=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x^2+ax+b-1)=(evaluar)=3+2a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+}\ln(x-1)=(evaluar)=0$$

Igualamos los límites laterales para obtener el valor del límite: $L=3+2a+b=0$

El valor de la función en el punto debe ser igual al valor del límite: $L=f(2) \rightarrow L=0$

Calculamos la derivada de la función a trozo (sin incluir, por ahora, el signo igual para $x=2$ ya que eso es precisamente lo queremos demostrar).

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$$

Las derivadas laterales deben coincidir:

$$f'(2^-)=4+a$$

$$f'(2^+)=1$$

$$f'(2^-)=f'(2^+) \rightarrow 4+a=1 \rightarrow a=-3$$

Si sustituimos en $3+2a+b=0 \rightarrow 3-6+b=0 \rightarrow b=3$

3. Obtener a y para que la función $f(x)$ sea derivable en $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} 3-ax^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=1$, debe ser continua en ese punto.

$$f(1)=3-a$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3-ax^2=3-a \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{ax}\right)=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3-a=\frac{2}{a} \quad \rightarrow \quad 3\cdot a-a^2-2=0 \quad \rightarrow \quad a=1 \;\; ó \;\; a=2$$

Estudiemos la derivabilidad en el punto frontera.

$$f'(x)=\begin{cases} -2\cdot a\cdot x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-2}{a\cdot x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ → Fíjate que dejamos los intervalos abiertos

Las derivadas laterales en $x=1$ deben ser iguales:

$$f'(1^-)=-2\cdot a \quad , \quad f'(1^+)=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad -2\cdot a=\frac{-2}{a} \quad \rightarrow \quad a^2=1 \quad \rightarrow \quad a=-1 \;\; ó \;\; a=1$$

Concluyendo de las condiciones de continuidad y derivabilidad: $f(x)$ será continua y derivable en $x=1$ si y solo si $a=1$.

4. Obtener a y b para que $f(x)$ sea derivable para cualquier valor de x .

$$f(x)=\begin{cases} a+bx-x^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en todo ℝ, tiene que ser continua en todo ℝ.

Las condiciones de continuidad en el punto $x=x_0$ son:

$$\exists \ f(x_0), x_0 \in Df$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L, L\in R$$

$$f(x_0)=L$$

Las condiciones para que sea derivable en el punto $x=x_0$ son:

$$f(x) \ \ sea \ \ continua \ \ en \ \ x_0$$

$$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$$

Primero estudiamos la continuidad en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

$x<1 \Rightarrow f(x)=a+bx-x^2$ → continua por ser polinómica

$x>1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x}$ → continua salvo donde se anula el denominador, pero $x=0 \notin (1,\infty)$

En el punto frontera $x=1$:

$$f(1)=a+b-1$$

$$\lim_{x\to 1^-} a+bx-x^2=a+b-1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x}=1 \quad \to \quad a+b-1=1 \quad \to \quad a+b=2$$

$$f(1)=L \quad \to \quad a+b-1=1$$

Estudiamos la derivabilidad, en primer lugar en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} b-2x & si \quad x<1 \\ \dfrac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$ → Recuerda: dejamos los intervalos abiertos

$x<1 \to f'(x)=b-2x$ → continua por ser polinómica → f(x) es derivable

$x>1 \to f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ → continua salvo en $x=0$, pero $x=0 \notin (1,\infty)$ → f(x) es derivable

En el punto frontera $x=1$:

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} b-2x=b-2 \quad , \quad f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{x^2}=-1 \quad \to \quad b-2=-1 \Rightarrow b=1$$

Uniendo esta nueva condición a la relación obtenida $a+b=2$:

$b=1,\ a+b=2 \Rightarrow a=1$ → Valores para que $f(x)$ sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

5. Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ **es derivable en** $x=0$ **, calcula** b **y** c **.**

Si la función es derivable en $x=0$ implica que también es continua en el punto frontera. Y por condiciones de continuidad:

$$\exists f(0)=c$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+bx+c)=c$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Para que coincidan los límites laterales → $c=1$ → Existe límite y vale $L=1$

Y, además, esta condición satisface $f(0)=c=1=L$.

Una vez comprobada la continuidad, estudiamos la derivabilidad en los intervalos abiertos donde está definida la función.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$ → dejamos intervalos abiertos en la derivada

Para que la función sera derivable en $x=0$ necesitamos que coincidan las derivadas evaluadas a la izquierda y a la derecha de $x=0$.

$$f'(0^-)=b$$

$f'(0^+)=\dfrac{0}{0}$ → ¡Recuerda! La derivada lateral es un límite, por lo que podemos resolver la indeterminación.

L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{(x+1)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2}$$

Por igualdad de los límites laterales → $b=\dfrac{-1}{2}$

6. Obtener a **y** b **para que** $f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x\leq 0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$ **sea derivable en** $x=0$ **.**

En estos problemas de determinar dos parámetros en una función definida en dos trozos, **suele aparecer una condición al estudiar la continuidad y otra condición a estudiar la derivabilidad**. Con esas condiciones, podremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolveremos.

Primero estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$f(0)=a\cdot\cos(0)+2\cdot 0=a$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot\cos(x)+2x)=a \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1})=b \ \rightarrow \ L^-=L^+ \ \rightarrow \ a=b$$

$f(0)=L \ \rightarrow \ a=b \ \rightarrow \ f(x)$ es continua en $x=0$ siempre que se cumpla $a=b$

Derivamos la función a trozos. Recuerda quitar el signo igual en el punto frontera, ya que eso es precisamente lo que queremos demostrar ahora: saber si es derivable en el punto frontera $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} -a\cdot sen(x)+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{a^2}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función será derivable en $x=0$ si coinciden las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-a\cdot sen(x)+2)=2 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2})=a^2-b \ \rightarrow \ 2=a^2-b$$

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si se cumple la condición $2=a^2-b$

Llegamos al siguiente sistema.

$\begin{cases} a=b \\ a^2-b=2 \end{cases}$ → Sustituimos la primera ecuación en la segunda → $a^2-a-2=0$

Resolvemos → $a=-1$, $a=2$ → Las soluciones que garantizan la derivabilidad en $x=0$ son: $a=-1$, $b=-1$ y $a=2$, $b=2$