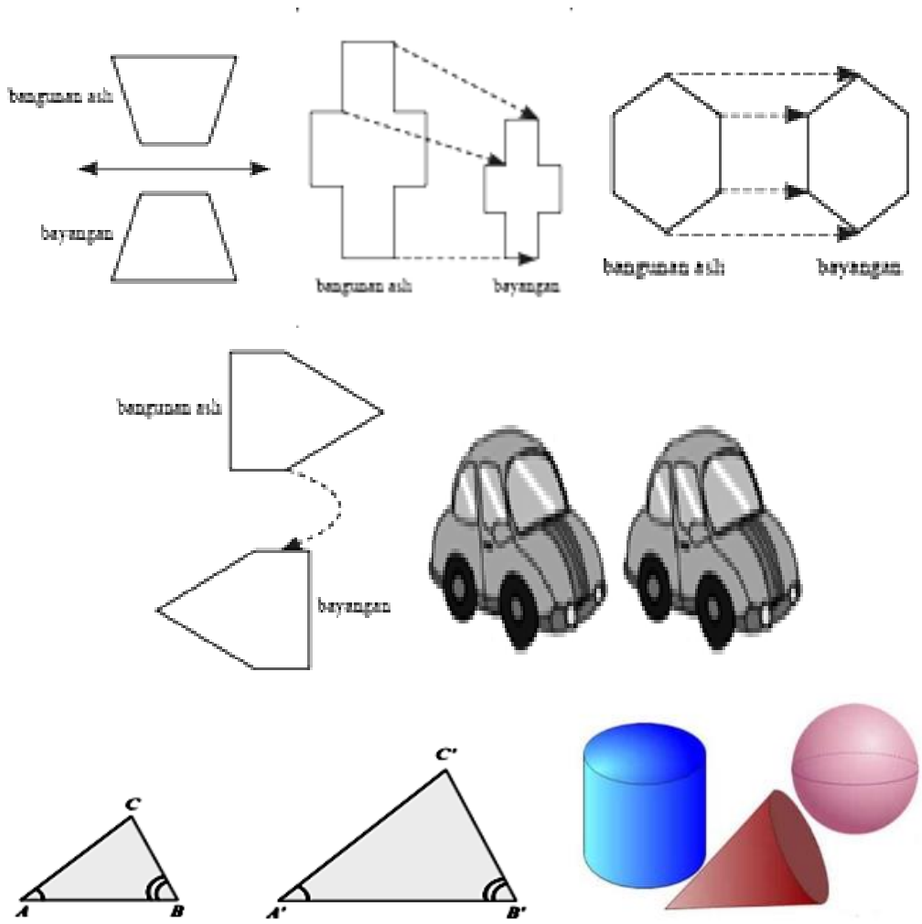
BAHAN AJAR MATEMATIKA
KELAS IX A - IX G



SEMESTER VI (ENAM)

GURU MATA PELAJARAN : MARIA KRENSENSIANA BHALA, S.Pd

NOMOR HP : 081 337 666 317

EMAIL : ensaimmeul92@gmail.com

Tahun Pelajaran 2022/2023

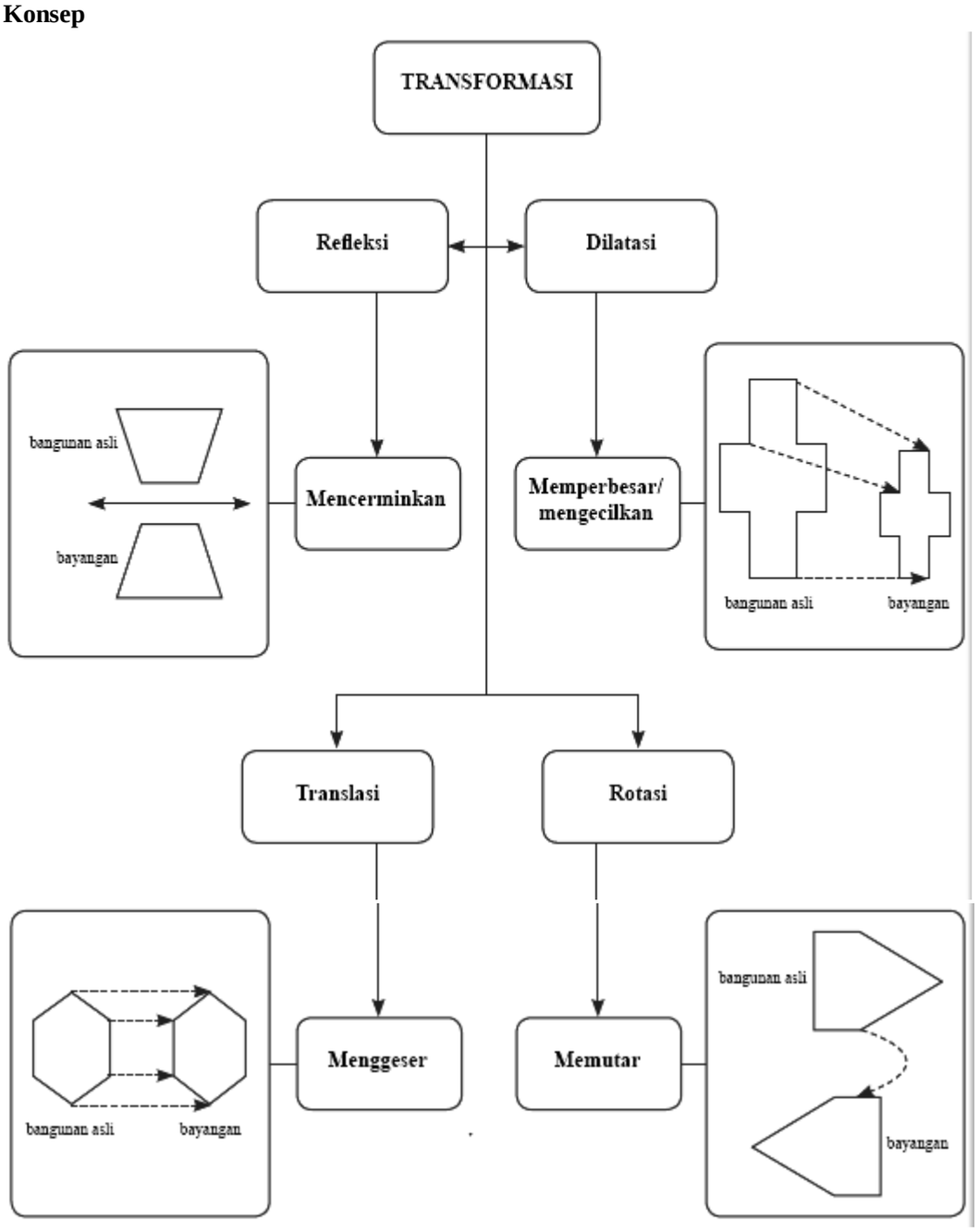
BAB III
TRANSFORMASI

A. Kompetensi Dasar

3.5 Menjelaskan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi) menggunakan masalah kontekstual

4.5 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan transformasi geometri (refleksi, translasi, rotasi, dan dilatasi).

B. Peta Konsep



C. Materi Ajar

❖ Sejarah Transformasi Geometri

Menurut sejarah, materi ini mulai dipelajari ketika seorang ilmuwan yang bernama ***Felix Klein*** mengemukakan sebuah teori dalam sebuah paper berjudul ***Erlangen Program.*** Felix Klein mengatakan bahwa *geometri adalah sebuah ilmu yang mempelajari tentang bangun yang bisa*

ditransformasikan ke dalam sebuah bentuk yang berbeda dan sifat-sifat bangun tidak terpengaruh karena perubahan yang dilakukan.

Komposisi transformasi geometri ialah materi yang cukup untuk melatih kemampuan menggambar dan kemampuan matematika kita. Sebab dengan perhitungan matematika yang tepat, kita bisa melakukan sesuatu terhadap bangun-bangun yang ada pada matematika ataupun di dalam kehidupan sehari-hari.

❖ Pengertian Transformasi Geometri

Transformasi geometri adalah sebuah perubahan suatu bidang geometri yang meliputi posisi, besar dan bentuknya sendiri. Apabila hasil transformasi kongruen dengan bangunan yang ditranformasikan, maka dapat disebut *transformasi isometri*. Sedangkan transformasi isometri sendiri mempunyai dua jenis yaitu *transformasi isometri langsung* dan *transformasi isometri berhadapan*. *Transformasi isometri langsung* adalah *termasuk translasi dan rotasi*, sedangkan *transformasi isometri berhadapan yaitu termasuk refleksi.*

❖ Jenis-jenis dan Rumus Transformasi

Rumus pada transformasi geometri akan memudahkan kita untuk menentukan sebuah hasil transformasi tanpa harus menggambarnya dalam bidang kartesius terlebih dulu. Meskipun demikian, ilustrasi gambar tentang transformasi juga dapat memberikan sebuah tambahan pemahaman buat kita semua.

1) Pencerminan (*Refleksi*)

Refleksi atau pencerminan merupakan satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan mengggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan. Sifat bayangan benda yang dibentuk oleh pencerminan adalah :

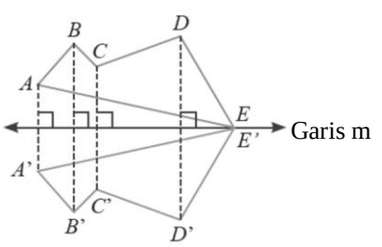
a. Bayangan suatu bangun yang dicerminkan memiliki bentuk dan ukuran yang sama dengan bangun aslinya.
b. Jarak bayangan ke cermin sama dengan jarak benda aslinya ke cermin.
c. Bayangan bangun pada cermin saling berhadapan dengan bangun aslinya.



Ilustrasi Contoh Soal Refleksi Kelas 9. Sumber www.unsplash.com

Perhatikan gambar di bawah.

Gambar di samping menunjukkan contoh refleksi (pencerminan) bangun datar ABCDE pada garis *m*. Perhatikan bahwa ruas garis yang menghubungkan titik dan bayangannya tegak lurus terhadap garis *m*. Garis *m* disebut **garis refleksi** untuk ABCDE dan bayangannya $A'B'C'D'E'$.



Karena *E* terletak pada garis refleksi, titik awal dan bayangannya berada di titik yang sama. Jarak antara *A* terhadap garis *m* sama dengan jarak *A'* terhadap garis *m*, begitu pula untuk titik sudut yang lainnya dan bayangannya yang memiliki jarak sama terhadap garis refleksi *m*.

Jika diketahui sebarang titik misalkan P dengan koordinat (*x*, *y*) pada koordinat kartesius, maka koordinat bayangan hasil pencerminannya dapat dilihat padat tabel berikut ini.

	No.	Pencerminan Terhadap	Titik Koordinat Bayangan
$P(x,y) \xleftrightarrow{sumbu-x} P'(x,-y)$	1.	Sumbu-x	$(x, -y)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{sumbu-y} P'(-x,y)$	2.	Sumbu-y	$(-x, y)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{O(0,0)} P'(-x,-y)$	3.	Titik Asal O (0, 0)	$(-x, -y)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{garis\ y=x} P'(y,x)$	4.	Garis $y = x$	(y, x)
$P(x,y) \xleftrightarrow{garis\ y=-x} P'(-y,-x)$	5.	Garis $y = -x$	$(-y, -x)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{garis\ y=h} P'(x,2h-y)$	6.	Garis $y = h$	$(x, 2h - y)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{garis\ x=h} P'(2h-x,y)$	7.	Garis $x = h$	$(2h - x, y)$
$P(x,y) \xleftrightarrow{titik\ (h,k)} P'(2h-x,2k-y)$	8.	Titik (h,k)	$(2h-x, 2k-y)$

❖ Garis Simetri

Pencerminan memiliki sifat yang sama dengan simetri lipat. Sebuah bangun memiliki *garis simetri* jika ditemukan suatu garis yang dapat digunakan untuk membagi bangun tersebut menjadi dua bagian dimana satu bagian merupakan refleksi bagian yang lain.

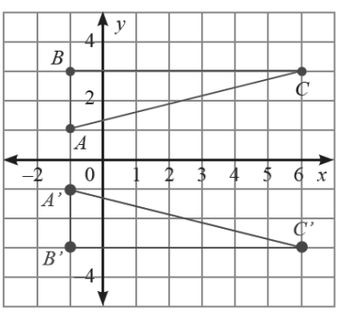
❖ Contoh soal

1. Pencerminan terhadap sumbu-x.

   Rumus : P $(x, y) \xleftrightarrow{sumbu-x} P'(x,-y)$

   Segitiga ABC berkoordinat di A (-1, 1), B (-1,3) dan C (6,3). Gambar segitiga ABC dan bayangannya yang direfleksikan terhadap sumbu-x. Bandingkan koordinat titik-titik ABC dengan koordinat bayangannya.

   Solusi :



Perhatikan bahwa titik A berada 1 satuan di atas sumbu-x, maka bayangannya adalah A' yang terletak 1 satuan di bawah sumbu-x. Sedangkan titik B dan C berada pada 3 satuan di atas sumbu-x, maka banyangannya adalah B' dan C' yang terletak 3 satuan di bawah sumbu-x. Dengan demikian diperoleh koordinat masing-masing titik dan bayangannya adalah sebagai berikut:

❖ A (-1, 1) $\xleftrightarrow{sumbu-x}$ $A'(x,-y)$

(x, y) $\quad A'(-1,-1) \quad \rightarrow Kuadran\ III$

Kuadran II

❖ B$(-1,3) \xleftrightarrow{\text{sumbu}-x}$ B$'(x,-y)$

$B'(-1,-3) \quad \rightarrow Kuadran\ III$

$Kuadran\ II$

❖ $C(6,3) \xleftrightarrow{sumbu-x} C'(x,-y)$

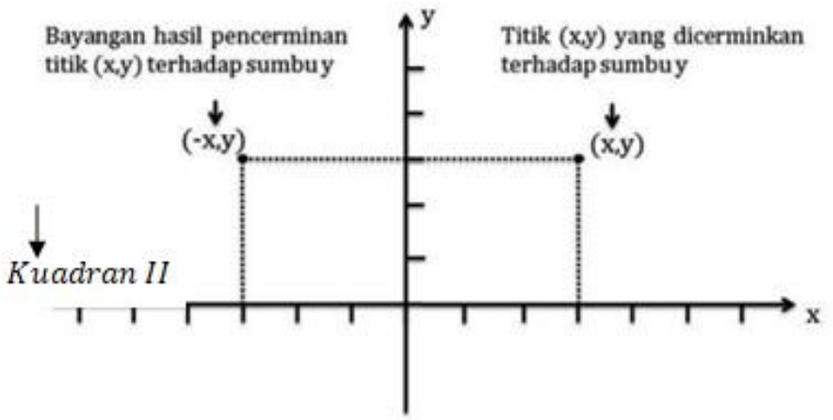
$C'(6,-3) \rightarrow Kuadran\ IV$

$Kuadran\ I$

Hubungkan ketiga titik sehingga membentuk segitiga $A'B'C'$.

2. Pencerminan terhadap sumbu-y.

   Pada dasarnya, penceminan terhadap sumbu-y meurpakan mengubah posisi objek pada koordinat kartesius dengan cara menceminkan objek tersebut terhadap sumbu-y. Untuk lebih jelasnya, perhatikan ilustrasi berikut. Misalkan titik (x, y) diceminkan terhadap sumbu-y, maka didapatkan bayangan $(-x, y)$ sebagai hasil pencerminannya seperti pada gambar berikut.



Sehingga, dapat disimpulkan jika titik (x, y) dicerminkan terhadap sumbu-y, maka diperoleh koordinat bayangan $(x', y') = (-x, y)$.

Rumus : $\boldsymbol{P(x,y) \xleftrightarrow{sumbu-y} P'(-x,y)}$

Tentukan bayangan titik A (-12,25) pada refleksi terhadap sumbu-y!

Diketahui : titik A (-12,25)

Ditanya : titik bayangan koordinat A = …?

Solusi : $A(x,y) \xleftrightarrow{sumbu-y} A'(-x,y)$

A (-12,25)) $\xleftrightarrow{sumbu-y} A'(-(-12),25)$

$\downarrow$ $A'(12,25) \rightarrow Kuadran\ I$

$Kuadran\ II$

Jadi, bayangan titik A (-12,25) pada refleksi terhadap sumbu-y adalah $A'(12,25)$.

3. Penceminan terhadap sumbu-x dan sumbu-y.
   Titik $Q(27,-18)$ direfleksikan terhadap sumbu-x, kemudian <u>bayangannya direfleksikan terhadap sumbu-y</u>. Tentukan koordinat bayangan titik terakhir!
   Solusi :

$Q(27,-18) \xleftrightarrow{sumbu-x} Q'(x,-y) \xleftrightarrow{sumbu-y} Q''(-x,y)$

$\downarrow$ (x,y)

Kuadran IV

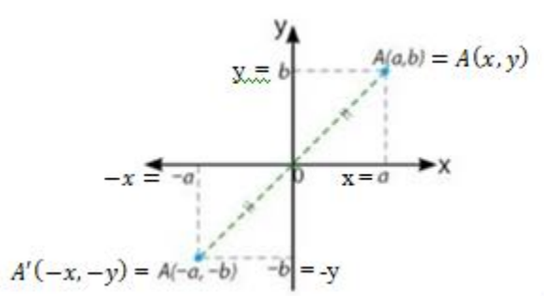
$Q(27,-18) \xleftrightarrow{sumbu-y} Q'(27,-(-18))$

$Q'(27,18) \longrightarrow$ Kuadran I

$Q'(27,18) \xleftrightarrow{sumbu-y} Q''(-27,18) \longrightarrow$ Kuadran II

   Gambarkan pada koordinat Cartesius!

4. Pencerminan terhadap titik asal O (0,0).
   Untuk penceminan terhadap titik asal cukup menarik karena <u>satu-satunya pencerminan yang mengacu hanya pada satu titik, yaitu titik (0,0).</u> Jika sebuah titik koordinat (x,y) direfleksikan pada titik asal, akan diperoleh bayangan pada titik $(-x,-y)$. Seperti diperlihatkan pada gambar berikut.



Jadi, hasil pencerminan titik asal akan selalu menghasilkan $(-x,-y)$.

Rumus : $\boldsymbol{P\,(x,y) \overset{O(0,0)}{\longleftrightarrow} P'(-x,-y)}$

Misalkan**,** titik A (-3,2) dicerminkan terhadap titik asal O (0,0). Tentukan titik koordinat bayangan!

$$A(x,y) \overset{O(0,0)}{\longleftrightarrow} A'(-x,-y)$$

$$A(-3,2)) \overset{O(0,0)}{\longleftrightarrow} A'(-(-3),-2) \rightarrow Kuadran\ III$$

$$A'(3,-2) \rightarrow Kuadran\ IV$$

Kuadran I

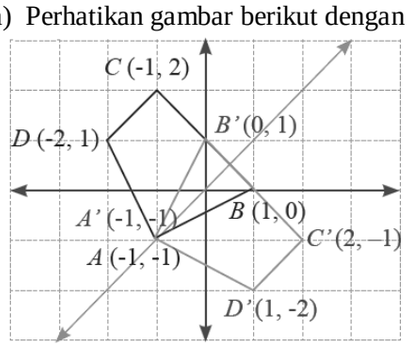
Jadi, titik koordinat bayangannya adalah $A'\,(3,-2)$

Gambarkan pada koordinat Cartesius!

5. Pencerminan terhadap garis y = x.

Rumus : $\boldsymbol{P\,(x,y) \overset{y=x}{\longleftrightarrow} P'\,(y,x)}$

a) Perhatikan gambar berikut dengan teliti!



Diketahui segi empat $ABCD$ yang memiliki koordinat di A (-1, -1), B (1, 0), C (-1, 2) dan D (-2, 1) direfleksikan terhadap garis $y = x$. Gambar $ABCD$ dan bayangannya yang direfleksikan terhadap garis $y = x$. Bandingkan koordinat titik-titik $ABCD$ dengan koordinat bayangannya.

Solusi :

Untuk menentukan bayangan titik-titik segiempat ABCD, perhatikan jarak titik B ke garis y = x. Dari titik B buat garis yang tegak lurus ke garis y = x (disebut garis BB') kemudian dapatkan titik B' yang memiliki jarak yang sama besar dengan jarak titik B ke garis y = x. Titik B' merupakan bayangan titik B hasil refleksi terhadap garis y = x. Dengan demikian diperoleh koordinat B' (0,1). Gunakan cara yang sama, sehingga diperoleh koordinat bayangan untuk titik-titik yang lainnya sebagai berikut :

❖ $A(-1,-1) \overset{y=x}{\longleftrightarrow} A'\,(y,x)$

$$A'\,(-1,-1) \rightarrow Kuadran\ III$$

Kuadran III

❖ $B(1,0) \overset{y=x}{\longleftrightarrow} B'(y,x)$

$$B'(0,1)$$

❖ $C(-1,2) \overset{y=x}{\longleftrightarrow} C'(y,x)$

$$C'(2,-1) \rightarrow Kuadran\ IV$$

Kuadran II

❖ $D(-2,1) \overset{y=x}{\longleftrightarrow} D'(y,x)$

$$D'(1,-2) \rightarrow Kuadran\ IV$$

Kuadran II

Hubungkan keempat titik sehingga membentuk segiempat $A'B'C'D'$.

b) Carilah hasil pencerminan titik $A(-3,2)$ terhadap garis y = x!

Solusi : $A(-3,2) \xleftrightarrow{garis\ y=x} A'(y,x)$

↓

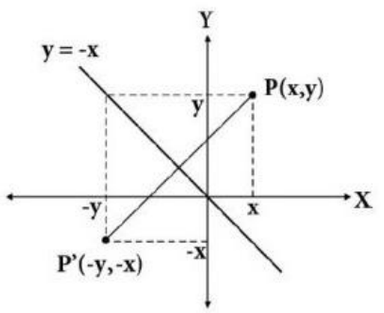
Kuadran II

$A'(2,-3) \longrightarrow$ Kuadran II

Jadi, hasil pencerminan titik $A(-3,2)$ terhadap garis y = x adalah $A'(2,-3)$.

Gambarkan pada koordinat Cartesius!

6. Pencerminan terhadap garis y = -x.



Rumus : $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \xleftrightarrow{y=-x} \boldsymbol{P'}\ (-\boldsymbol{y},-\boldsymbol{x})$

a) Tentukan koordinat bayangan titik $S(12,-7)$ jika direfleksikan terhadap garis y = -x!

Solusi : $S(12,-7) \xleftrightarrow{y=-x} S'(-y,-x)$

$S'(-(-7),-12)$

$S'(7,-12) \rightarrow$ Kuadran IV

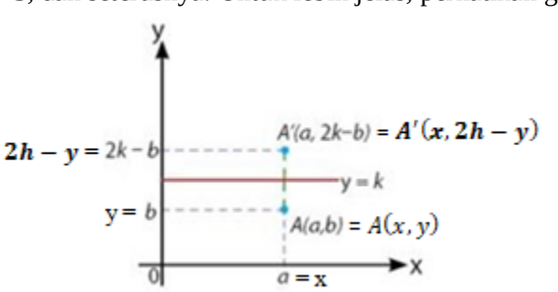
Jadi, bayangan titik $S(12,-7)$ jika direfleksikan terhadap garis y = -x adalah $S'(7,-12)$.

Gambarkan pada koordinat Cartesius!

7. Pencerminan terhadap garis y = h.

Refleksi ke garis sejajar x artinya pencerminan dilakukan terhadap sebuah garis horizontal. Atau dapat dikatakan bahwa nilai x nya berubah dari 0 menjadi konstanta tertentu. Pada refleksi ke garis sejajar X, nilai x tetap sementara y berubah.

Untuk pencerminan terhadap garis y = h kita bisa memahami dengan baik jika kita mampu membuat garis cermin y = h, dimana nilai h merupakan bilangan asli bisa 1, 2, 3, … atau -1, -2, -3, dan seterusnya. Untuk lebih jelas, perhatikan gambar berikut.



Rumus : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \xleftrightarrow{garis\ y=h} \boldsymbol{P'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{2h}-\boldsymbol{y})$

Hasil pencerminan titik D (–1, –6) terhadap garis y = 5 adalah ...

Solusi :

$$D(-1,-6) \xleftrightarrow{garis\ y=5} D'(x,2h-y)$$
$$D'\big(-1,2.(5)-(-6)\big)$$
$$D'(-1,10+6)$$
$$D'(-1,16)$$

Kemudian gambarkan bayangannya pada bidang koordinat Cartesius!

8. Pencerminan terhadap garis x = h.

Jenis refleksi terakhir adalah refleksi ke garis sejajar Y. Apabila melihat pada penjelasan di atas kamu seharusnya bisa langsung tahu bahwa refleksi tipe ini pasti mengubah nilai x sedangkan nilai y nya akan tetap seperti semula.

a) Bayangan titik P(-4, 5) oleh refleksi terhadap garis y = -x dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis x = 2 adalah...
   a. P'(-5, 4)
   b. P' (4, -5)
   c. P' (9, 4)
   d. P, (-4, 9)

   Solusi :

$$P(-4,5) \xleftrightarrow{y=-x} \mathrm{P}' = (-\mathrm{y}, -\mathrm{x}) \xleftrightarrow{\text{garis x = 2}} \mathrm{P}''(2h - x, y)$$

$$P(-4,5) \xleftrightarrow{y=-x} \mathrm{P}'(-5, -(-4))$$

$$\mathrm{P}'(-5,4) \rightarrow Kuadran\ II$$

$$\mathrm{P}'(-5,4) \xleftrightarrow{\text{garis x = 2}} \mathrm{P}''(2.(2) - (-5), 4)$$

$$\mathrm{P}''(4 - (-5), 4)$$

$$\mathrm{P}''(4 + 5, 4)$$

$$\mathrm{P}''(9,4) \rightarrow Kuadran\ I$$

   Jadi, bayangan titik P(-4, 5) oleh refleksi terhadap garis y = -x dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis x = 2 adalah $\mathrm{P}''(9,4)$

b) Bayangan dari garis y = 3x + 7 jika dicerminkan terhadap garis x = 4 adalah …

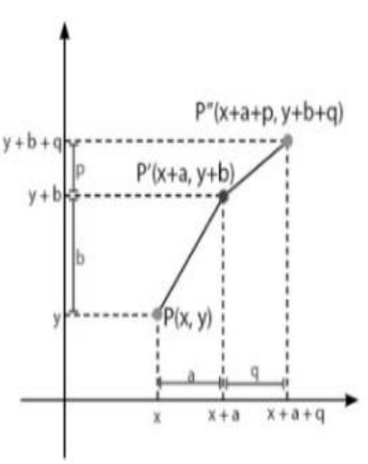
   Solusi :

   (2h – x, y) = (x', y')
   (2(4) – x, y) = (x', y')
   (8 – x, y) = (x', y')
   - 8 – x = x' ⇒ **x = 8 – x'**
   - **y = y'**

   Substitusikan ke
   - y = 3x + 7
   - y' = 3(8 – x') + 7
   - y' = 24 – 3x' + 7
   - y' = 31 – 3x'
   - Jadi bayangan dari garis y = 3x + 7 adalah garis y' = 31 – 3x'

2) Pergeseran (*Translasi*)

Translasi adalah perubahan objek dengan cara menggeser objek dari satu posisi ke posisi lainnya dengan jarak tertentu, atau translasi merupakan salah satu jenis transformasi yang bertujuan untuk memindahkan semua titik suatu bangun dengan jarak dan arah yang sama. Penentuan hasil objek melalui translasi yaitu cukup mudah. Caranya kita hanya dengan menambahkan *absis* dan *ordinat* dengan jarak tertentu sesuai dengan ketentuannya. Untuk lebih jelasnya mengenai proses translasi ini, kita dapat mengamati pada gambar di bawah ini.



$$P(x,y) \xrightarrow{T=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(x',y') = (x+a, y+b)$$

$$P(x,y) \xrightarrow{T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} a+p \\ b+q \end{pmatrix}} P''(x'',y'') = (x+a+p, y+b+q)$$

Translasi pada bidang Cartesius dapat dilukis jika diketahui arah dan seberapa jauh gambar bergerak secara mendatar dan atau vertikal. Untuk nilai yang sudah ditentukan a dan b yakni translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memindah setiap titik *P* (*x, y*) dari sebuah bangun pada bidang datar ke *P'* (*x* + *a*, *y* + *b*), dimana x mengukur jarak pergeseran secara mendatar dan y mengukur jarak

pergeseran secara vertikal. *Jika nilai x dan y positif, maka benda atau bangun digeser ke kanan dan ke atas. Jika nilai x dan y negatif, makan benda atau bangun digeser ke kiri dan ke bawah*. **Translasi** dapat **disimbolkan** dengan **$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$.**

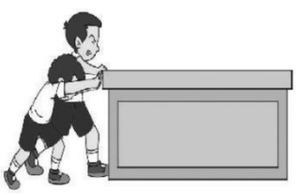
Sedikit Informasi

Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis horizontal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah kanan, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah kiri.

Jika suatu translasi (pergeseran) pada suatu benda dilakukan sepanjang garis vertikal, maka translasi tersebut akan bernilai positif jika benda ditranslasikan ke arah atas, dan bernilai negatif jika benda ditranslasikan ke arah bawah.

Contoh :

1. Translasi pada suatu benda



Sumber: Dokumen Kemdikbud
Gambar 3.2 Mendorong meja

Pernahkah kamu menggeser meja dari satu tempat ke tempat lainnya? Ketika kamu berhasil memindahkan meja tersebut maka posisi meja akan berubah dari posisi awal menuju posisi akhir. Gerakan memindahkan meja tersebut merupakan salah satu contoh dari translasi.

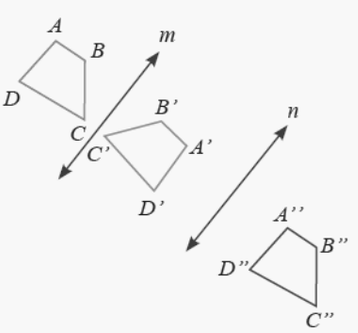
2. Translasi pada koordinat Cartesius (kerjakan LKPD)

Sedikit Informasi

Menentukan Translasi Dengan Menggunakan Pencerminan Berulang

Cara lain untuk menentukan translasi adalah dengan menunjukkan pencerminan terhadap dua garis sejajar, kemudian mencerminkan gambar/bangun terhadap garis lain yang sejajar. Perhatikan contoh berikut ini.

Perhatikan gambar di bawah. Garis m dan n sejajar. Tentukan apakah bangun berwarna merah merupakan translasi bangun yang berwarna biru, segi empat $ABCD$.

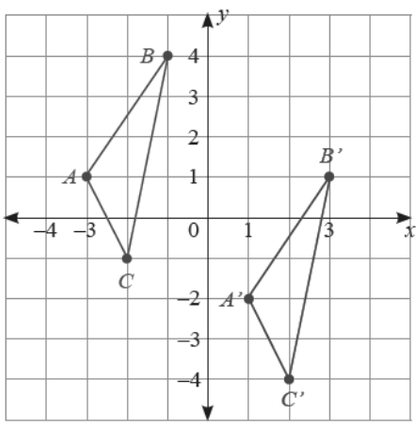


Penyelesaian

Cerminkan segi empat $ABCD$ di garis m. Hasilnya yaitu bangun berwarna hijau, segi empat $A'B'C'D'$. Kemudian cerminkan bangun berwarna hijau, segi empat $A'B'C'D'$ di garis n menghasilkan segi empat berwarna merah. Segiemmpat berwarna merah, $A''B''C''D''$ memiliki bentuk dan arah yang sama dengan segi empat $ABCD$.

Jadi, segi empat $A''B''C''D''$ merupakan bayangan hasil translasi segi empat $ABCD$.

Contoh 1 **Koordinat Bayangan Hasil Translasi**



Gambar di samping menunjukkan segitiga ABC yang ditranslasikan 4 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah. Hal ini dapat dinyatakan sebagai $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 3)$.

Koordinat bayangan hasil translasinya sebagai berikut

$A(-3, 1) \rightarrow A'(-3 + 4, 1 - 3)$ atau $A'(1, -2)$

$B(-1, 4) \rightarrow B'(-1 + 4, 4 - 3)$ atau $B'(3, 1)$

$C(-2, -1) \rightarrow C'(-2 + 4, -1 - 3)$ atau $C'(2, -4)$

3) Perputaran (*Rotasi*)

❖ Kegiatan 1 : Rotasi Benda

Ayo Kita Amati

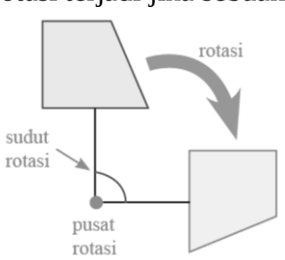


Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 3.3 Perputaran roda

Coba perhatikan roda yang berputar pada Gambar 3.3 di atas. Roda tersebut dapat diputar searah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (b) atau dapat diputar berlawanan arah jarum jam seperti yang terlihat pada Gambar 3.3 (c). Gerakan putaran roda merupakan salah satu contoh dari rotasi. Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Titik tetap ini disebut *pusat rotasi*. Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal disebut dengan *sudut rotasi*.

Rotasi merupakan salah satu bentuk transformasi yang memutar setiap titik pada gambar sampai sudut dan arah tertentu terhadap titik yang tetap. Suatu perputaran atau rotasi terjadi jika sebuah titik, gambar, atau bangun diputar mengelilingi titik pusatnya.

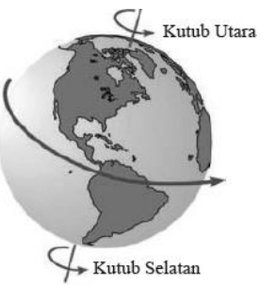


Untuk bisa melakukan rotasi diperlukan informasi tentang sudut rotasi, arah rotasi dan titik pusat rotasi.

a. **Besarnya sudut dari bayangan benda terhadap posisi awal** disebut dengan **sudut rotasi.** *Sudut rotasi* bernilai $0^0 - 360^0$**.** Rotasi yang dipelajari adalah rotasi dengan sudut – sudut istimewa yaitu 90^0, 180^0, 270^0 dan 360^0.

b. Suatu rotasi ditentukan oleh **arah rotasi**. Arah rotasi diatur berdasarkan penentuan kuadran. Jika *berlawanan arah* dengan arah perputaran jarum jam, maka *sudut putarnya positif*. Jika *searah* perputaran jarum jam, maka sudut putarnya *negatif*.
c. **Titik tetap** disebut **titik pusat rotasi,** berupa suatu titik koordinat. Jika titik pusat rotasi tidak ditentukan, maka titik pusat rotasi adalah titik asal O (0,0).

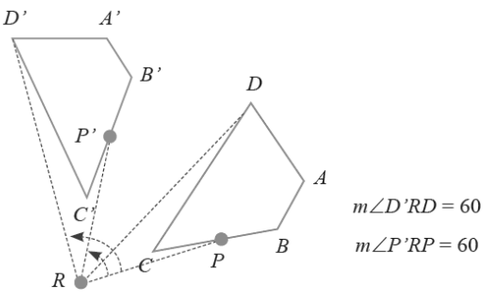
Beberapa benda dapat berotasi dengan pusat rotasi berada di dalam benda itu sendiri. Salah satu contohnya adalah Planet Bumi berputar atau berotasi pada porosnya. Pada pembelajaran terdahulu, kamu juga telah mempelajari bahwa beberapa benda memiliki simetri putar. Jika suatu bangun/gambar dapat dirotasikan kurang dari 360° terhadap titik pusat rotasi sedemikian sehingga bayangan dan gambar awalnya sama, maka bangun/gambar tersebut memiliki **simetri putar**.



Sumber: http://www.fisikanet.lipi.go.id

- Simetri putar
  Simetri putar erat kaitannya dengan rotasi. Suatu bangun memiliki simetri putar jika dapat diputar pada pusatnya dan kembali ke posisi asalnya lebih dari satu kali dalam satu putaran penuh.

Gambar di bawah ini menunjukkan rotasi bangun *ABCD* terhadap pusat rotasi, *R*. Besar sudut *ARA', BRB', CRC',* dan *DRD'* sama. Sebarang titik *P* pada bangun *ABCD* memiliki bayangan *P'* di *A'B'C'D'* sedemikian sehingga besar $\angle PRP'$ konstan. Sudut ini disebut sudut rotasi.



Pada rotasi, bangun awal selalu kongruen dengan bayangannya.

Jika titik P (a,b) dirotasikan dengan pusat O (0,0) sejauh 90^0, -90^0, 180^0, -180^0, 270^0 dan -270^0 akan diperoleh bayangan titik P, yaitu titik P' dengan koordinat seperti pada tabel berikut :

Koordinat titik awal	**Sudut rotasi**	**Hasil rotasi**
P (a,b)	90^0	P'(-b, a)
P (a,b)	-90^0	P'(b, -a)
P (a,b)	180^0	P'(-a, -b)
P (a,b)	-180^0	P'(-a, -b)
P (a,b)	270^0	P'(b, -a)
P (a,b)	-270^0	P'(-b, a)

❖ Kegiatan 2 : kerjakan LKPD

❖ Kegiatan 3 : Rotasi Titik pada Bidang Koordinat



Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

1. Buatlah titik W (7, 7) dan titik A (5, 4). Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam.

   Alternatif jawaban: koordinat titik W' adalah (7, –7) dan koordinat titik A' adalah (4, –5)

2. Gambar dan tentukan bayangan titik W dan A pada rotasi 90° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam.

   Alternatif jawaban: koordinat titik W' adalah (–7, 7) dan koordinat titik A' adalah (–4, 5)

3. Jika titik W dan A dirotasikan sejauh 180° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) searah jarum jam, berapakah koordinat bayangannya?

   Alternatif jawaban: koordinat titik W' adalah (–7, –7) dan koordinat titik A' adalah (–5, –4)

4. Apakah hasilnya sama jika kamu merotasikan titik tersebut sejauh 180° dengan pusat rotasi titik asal O (0, 0) berlawanan arah jarum jam?

   Alternatif jawaban: ya, sama.

❖ Kegiatan 4 : Menggambar Rotasi Segitiga Pada Bidang Koordinat

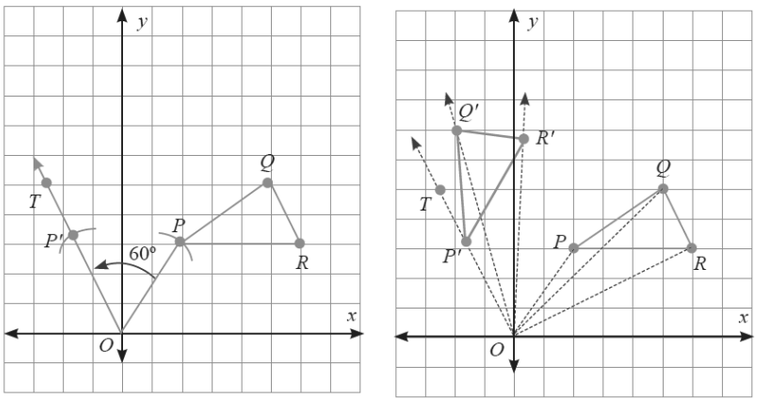


Sediakan kertas milimeter (kertas berpetak). Kemudian buatlah koordinat kartesius pada kertas tersebut. Lakukanlah kegiatan di bawah ini.

Diketahui segitiga PQR memiliki koordinat di P (2,3), Q (6, 3), dan R (5, 5). Gambarlah ΔPQR dan bayangannya yaitu $\Delta P'Q'R'$ pada rotasi 60° berlawanan dengan arah berlawanan perputaran jarum jam terhadap titik asal O (0, 0). Ikuti langkah-langkah di bawah ini.

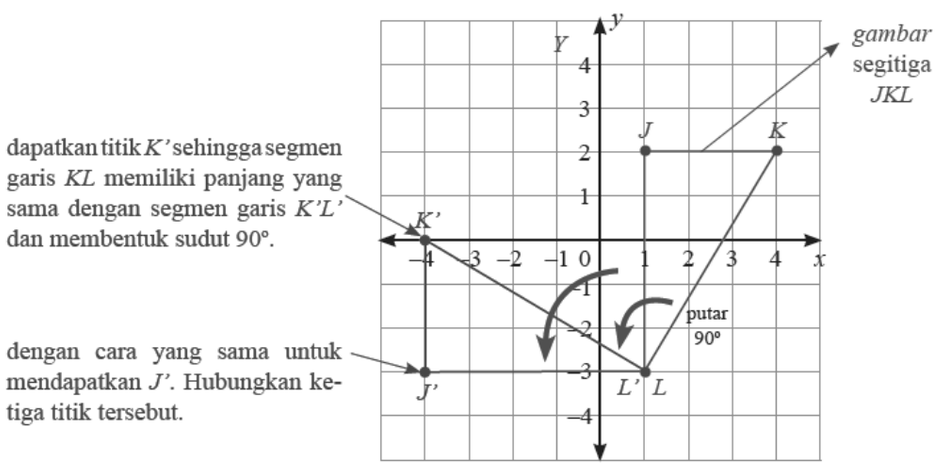
1. Pertama, gambar ΔPQR.
2. Gambar ruas garis dari titik asal ke titik P. Tariklah garis OP dengan O menunjukkan titik asal.
3. Gunakan busur untuk mengukur sudut 60° berlawanan arah jarum jam dengan OP sebagai salah satu sisinya.
4. Gambar garis OT sehingga POT membentuk sudut 60°.
5. Gunakan jangka untuk menyalin OP di OT. Beri nama garis OP'.
6. Ulangi langkah di atas untuk titik Q dan R sehingga didapatkan titik Q' dan R'. Hubungkan titik P', Q' dan R' sehingga terbentuk segitiga $P'Q'R'$.
7. $\Delta P'Q'R'$ merupakan bayangan hasil rotasi 60° dari ΔPQR berlawanan arah jarum jam dengan pusat rotasi di titik asal O (0, 0).

Solusi :



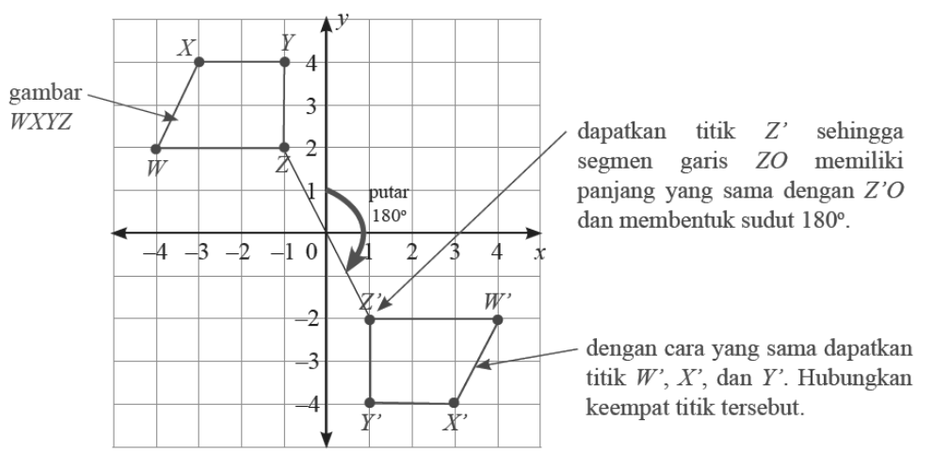
Contoh soal :

1. Menggambar Bayangan Segitiga Hasil Rotasi
   Tentukan bayangan segitiga JKL dengan koordinat J (1,2), K(4,2) dan L (1,-3) pada rotasi 90^0
   Berlawanan jarum jam dengan pusat rotasi adalah titik L.
   Solusi :



   Koordinat bayangannya $J'(-4, -3)$, $K'(-4, 0)$, dan $L'(1, -3)$.

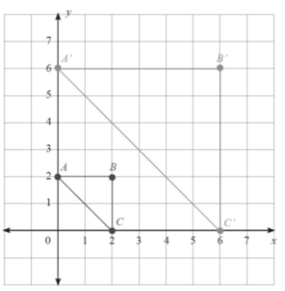
2. Menggambar Bayangan Trapesium Hasil Rotasi
   Tentukan bayangan trapesium WXYZ dengan koordinat W (-4,2), X (-3,4), Y (-1,4) dan Z (-1,2) pada rotasi 180^0 dengan pusat rotasi O (0,0)!
   Solusi :



   Koordinat bayangannya W' (4,-2), X' (3,-4) Y' (1,-4) dan Z' (1,-2).

4) Perkalian (Dilatasi)

Semua transformasi yang telah dipelajari sebelumnya menghasilkan gambar yang sama dengan gambar aslinya. Dilatasi merupakan jenis lain dari transformasi. Namun, bayangan dilatasi mungkin memiliki ukuran yang berbeda dengan gambar aslinya. *Perkalian (dilatasi) adalah peristiwa transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun, tetapi tidak mengubah bentuk bangunnya. Dilatasi membutuhkan titik pusat dan faktor skala.* Dilatasi terhadap titik pusat merupakan perkalian dari koordinat tiap-tiap titik pada suatu bangun datar dengan faktor skala sebesar *k*. *Faktor skala menentukan* apakah suatu *dilatasi merupakan pembesaran atau pengecilan dari bangun yang asli.* **Nilai faktor skala bisa positif, nol, atau negatif. Contoh : faktor skala 2 artinya membuat semua jarak dua kali lebih panjang.** Secara umum dilatasi dari suatu koordinat (*x*, *y*) dengan faktor skala *k* akan menghasilkan koordinat (*kx*, *ky*) atau dapat ditulis (*x*, *y*) → (*kx*, *ky*). Ketika ***k* > 1 maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pembesaran,** tetapi **jika 0 < *k* < 1 maka dilatasi tersebut termasuk ke dalam pengecilan**. Untuk memperbesar atau memperkecil bangun, letak pusat dilatasi dapat **di dalam**, **di luar**, atau **pada tepi** bangun yang akan didilatasikan. Pusat dilatasi berbentuk titik koordinat. Jika tidak ditentukan maka titik pusatnya adalah O (0,0).

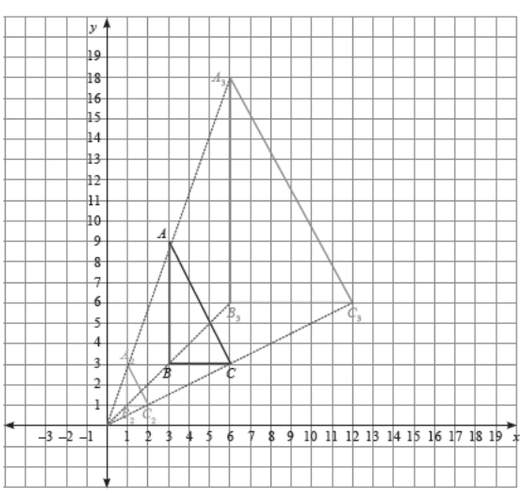


❖ Kegiatan 1 : Dilatasi Benda



Ayo Kita Amati

Gambar di bawah ini menunjukkan bagaimana dilatasi dapat menghasilkan bayangan yang lebih besar dan bayangan yang lebih kecil dari aslinya. Segitiga ABC didalatasi dengan pusat dilatasi titik awal P (0, 0) sehingga menghasilkan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga $A_3B_3C_3$.





Ayo Kita Gali Informasi

Berapakah koordinat dari titik A, B, dan C? Berapakah koordinat dari titik A_2, B_2, dan C_2? Berapakah koordinat dari titik A_3, B_3, dan C_3?

Alternatif jawaban:

Koordinat titik A_2, B_2, dan C_2 masing-masing adalah (1, 3), (1, 1) dan (2, 1)

Koordinat titik A_3, B_3, dan C_3 masing-masing adalah (6, 18), (6, 6) dan (12, 6)

Perhatikan segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC. Berapakah panjang PA_2 jika dibandingkan dengan PA? Bagaimana dengan perbandingan kedua sisi yang lain? Apakah sama? Coba lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk memudahkanmu melihat hubungan antara segitiga $A_2B_2C_2$ dan segitiga ABC.

$$PA_2 = \frac{1}{3} \times (PA)$$

$$PB_2 = \frac{1}{3} \times (PB)$$

$$PC_2 = \left(\frac{1}{3}\right) \times (PC)$$

Nilai ini selanjutnya disebut dengan faktor skala

Berapakah besarnya faktor skala segitiga $A_2B_2C_2$ yang merupakan hasil dilatasi dari segitiga ABC?

Alternatif jawaban: $\frac{1}{3}$

Dengan cara yang sama, berapakah faktor skala Segitiga $A_3B_3C_3$ yang merupakan hasil dilatasi segitiga ABC?

Alternatif jawaban: 2

❖ Kegiatan 2 : Menggambar Bayangan Hasil Dilatasi



Ayo Kita Mencoba

Diketahui segitiga ABC berkoordinat di A (7, 10), B (4, –6), dan C (–2, 3). Tentukan bayangan ΔABC setelah didilatasi yang berpusat di titik asal dengan faktor skala 2. Gambar segitiga asal dan bayangannya. Ikuti langkah-langkah berikut ini:

Langkah 1 Gambar ΔABC sesuai koordinatnya.

Langkah 2 Tentukan titik A' sehingga $OA' = 2OA$, titik B' sehingga $OB' = 2OB$, dan titik C' sehingga $OC' = 2OC$.

Langkah 3 Hubungkan titik-titik A', B' dan C' menjadi $\Delta A'B'C'$.

Ayo Kita Gali Informasi

Berapakah koordinat titik *A'*, *B'* dan *C'*? Lengkapi bagian kosong di bawah ini untuk mengetahui hubungan antar titik *A'* dan *A*, *B'* dan *B*, serta titik *C'* dan *C*.

$A' = (14, 20) = (2 \times 7, 2 \times 10)$

$B' = (8, -12) = (2 \times 4, 2 \times (-6))$

$C' = (-4, 6) = (2 \times (-2), 2 \times 3)$

Nilai ini menunjukkan faktor skala

Nilai ini menunjukkan koordinat awal *ABC*

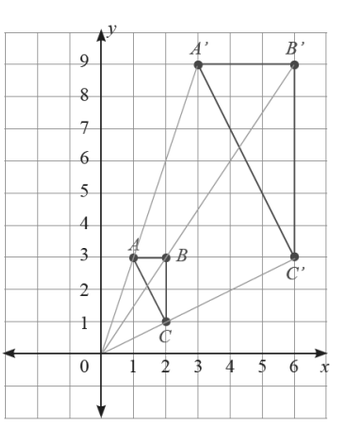
Berdasarkan Kegiatan 2, kamu telah mempelajari cara menentukan dilatasi dengan pusat di titik asal O (0, 0). Kamu dapat dengan mudah menentukan titik-titik koordinat bayangan dengan mengalikan titik koordinat asli dengan faktor skala. Bagaimana jika pusat dilatasi bukan di titik asal O (0, 0)? Jelaskan bagaimana caramu menentukan bayangan suatu bangun yang berpusat di suatu titik P (a, b).

Alternatif jawaban:

Diketahui pusat dilatasi adalah titik P (a, b). Langkah-langkah untuk mendapatkan koordinat bayangan hasil dilatasi adalah dengan membuat garis dari titik P menjuju masing-masing titik sudut dari bangun datar. Setelah itu perpanjang garis tersebut menjadi beberapa kali lipat dari jarak mula-mula sesuai dengan faktor skala yang ditentukan. Kamu akan mendapatkan koordinat bayangan hasil dilatasi dengan pusat dilatasi adalah titik P (a, b).

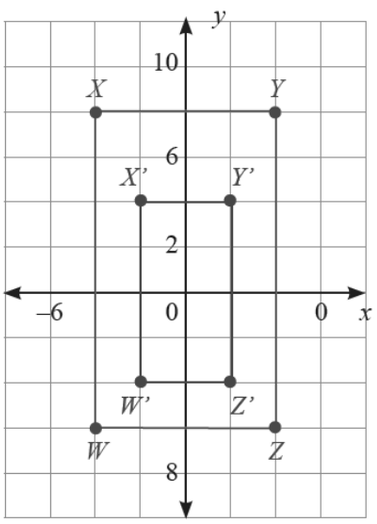
- Contoh soal :
  1. Dilatasi Pada Segitiga dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal
     Diketahui segitiga ABC dengan titik sudut masing-masing A (1,3), B (2,3) dan C (2,1). Gambar segitiga ABC dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 3 dengan pusat dilatasi titik awal.
     Solusi :

Titik sudut *ABC*	$(3x, 3y)$	Titik sudut *A'B'C'*
A (1, 3)	(3 × 1, 3 × 3)	A' (3, 9)
B (2, 3)	(3 × 2, 3 × 3)	B' (6, 9)
C (2, 1)	(3 × 2, 3 × 1)	C' (6, 3)



2. Dilatasi pada Segiempat dengan Pusat Dilatasi di Titik Asal
   Diketahui segi empat WXYZ dengan titik sudut masing-masing W (-4,-6), X (-4,8), Y (4,8) dan Z (4,-6). Gambar segiempat WXYZ dan bayangannya setelah didilatasi dengan faktor skala 0,5 dengan pusat dilatasi titik awal!
   Solusi :

Titik sudut *WXYZ*	(0,5*x*, 0,5*y*)	Titik sudut *W'X'Y'Z'*
W (–4, –6)	(0,5 × (–4), 0,5 × (–6))	*W'* (–2, –3)
X (–4, 8)	(0,5 × (–4), 0,5 × 8)	*X'* (–2, 4)
Y (4, 8)	(0,5 × 4, 0,5 × 8)	*Y'* (2, 4)
Z (4, –6)	(0,5 × 4, 0,5 × (–6))	*Z'* (2, –3)



3. Dilatasi pada Segi Empat dengan Pusat Dilatasi di Titik P
   Persegi panjang KLMN berkoordinat di K (2,0), L (3,0), M (3,2), dan N (2,2). Tentukan koordinat K'L'M'N' yang merupakan bayangan dari persegi panjang KLMN setelah didilatasi dengan pusat dilatasi di titik P (1,4) dan faktor skala 2.
   Penyelesaian

   Langkah 1
   Tentukan titik *P* dan gambar persegi panjang *KLMN* pada bidang koordinat.

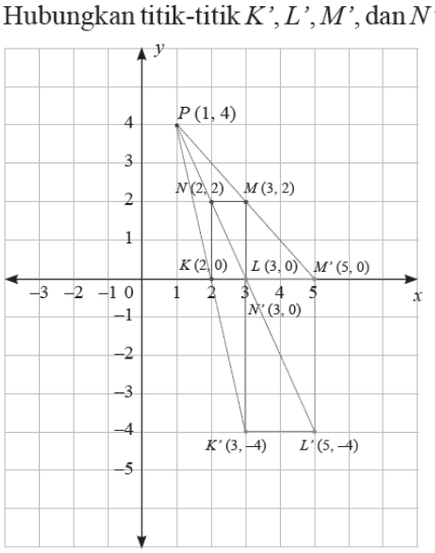
   Langkah 2
   Buat garis dari titik *P* sehingga *PK'* = 2*PK*

   PL' = 2*PL*, *PM'* = 2*PM*, dan *PN'* = 2*PN*.

   Sehingga diperoleh titik-titik koordinat bayangan *K*, *L*, *M*, dan *N* adalah sebagai berikut.

   K' (3, -4), *L* (5, –4), *M* (5, 0), dan *N'* (3, 0).

   Langkah 3
   Hubungkan titik-titik *K'*, *L'*, *M'*, dan *N'* sehingga terbentuk persegi panjang *K'L'M'N'*.



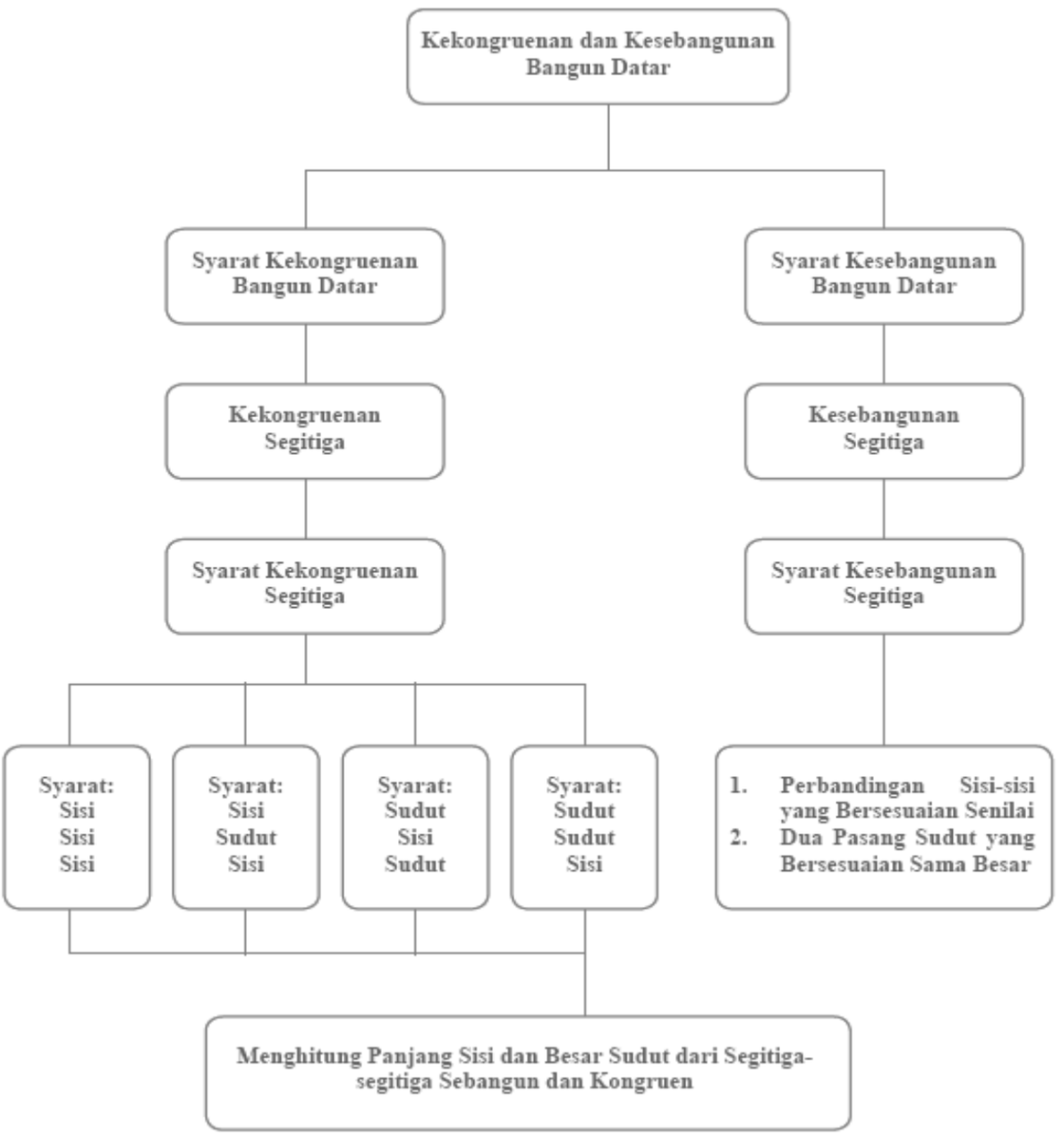
BAB IV
KEKONGRUENAN DAN KESEBANGUNAN

A. Kompetensi Dasar

3.6 Menjelaskan dan menentukan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar.

4.6 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesebangunan dan kekongruenan antarbangun datar.

B. Peta Konsep



C. Materi Pembelajaran

1) **Kekongruenan Bangun Datar**

Dua bangun yang mempunyai bentuk dan ukuran yang sama dinamakan **kongruen**. Dua bangun segi banyak (*polygon*) dikatakan kongruen jika memenuhi dua syarat, yaitu:

1. Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
2. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar



Sudut-sudut yang bersesuaian:

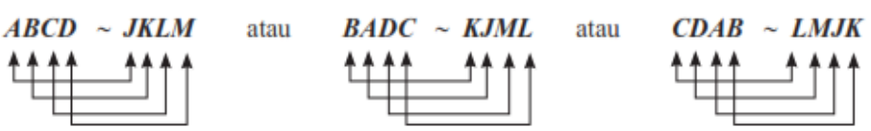
$\angle A$ dan $\angle J$ $\rightarrow$ $\angle A = \angle J$
$\angle B$ dan $\angle K$ $\rightarrow$ $\angle B = \angle K$
$\angle C$ dan $\angle L$ $\rightarrow$ $\angle C = \angle L$
$\angle D$ dan $\angle M$ $\rightarrow$ $\angle D = \angle M$

Sisi-sisi yang bersesuaian:

AB dan JK $\rightarrow$ $AB = JK$
BC dan KL $\rightarrow$ $BC = KL$
CD dan LM $\rightarrow$ $CD = LM$
DA dan MJ $\rightarrow$ $DA = MJ$

i. Jika bangun ABCD dan KLMN memenuhi kedua syarat tersebut, maka bangun ABCD dan KLMN **kongruen**, dinotasikan dengan $ABCD \cong$ JKLM
ii. Jika bangun ABCD dan KLMN tidak memenuhi kedua syarat tersebut maka bangun ABCD dan KLMN tidak kongruen, dinotasikan dengan $ABCD \ncong JKLM.$.

Ketika menyatakan dua bangun sebangun sebaiknya dinyatakan berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:



- Mengidentifikasi Dua Benda Kongruen atau Tidak



Coba kamu amati gambar di bawah ini dengan seksama.

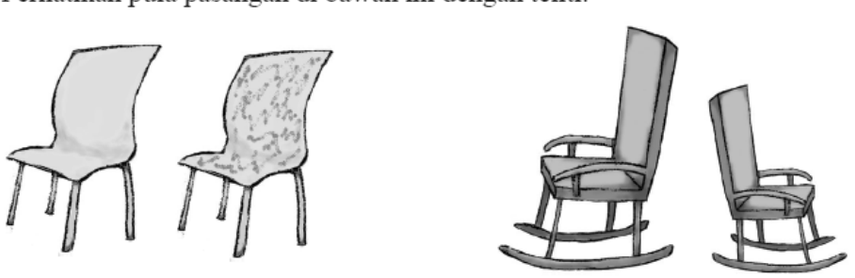


(a) Dua gambar mobil yang kongruen (b) Dua gambar mobil yang tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.1 Sepasang mobil kongruen dan tidak kongruen

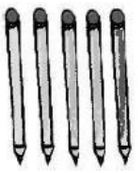
Perhatikan pula pasangan di bawah ini dengan teliti.



(a) Dua gambar kursi yang kongruen (b) Dua gambar kursi yang tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.2 Sepasang kursi kongruen dan tidak kongruen



(a) Lima gambar pensil yang kongruen



(b) Dua gambar pensil tidak kongruen

Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.3 Pensil-pensil yang kongruen dan tidak kongruen

Coba kamu amati pula Gambar 4.4 dan 4.5 di bawah ini.



Sumber: Dokumen Kemdikbud

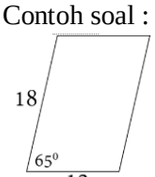
Gambar 4.4 Dua pigura lukisan yang kongruen



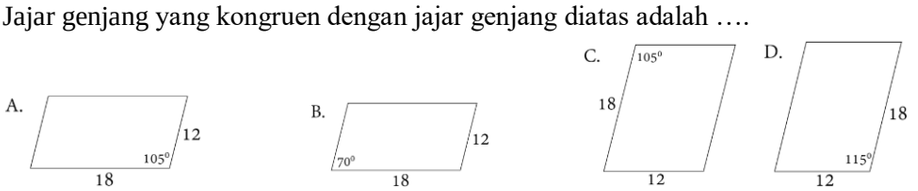
Sumber: Dokumen Kemdikbud

Gambar 4.5 Dua pigura lukisan yang tidak kongruen

Contoh soal : Perhatikan jajar genjang berikut!



Jajar genjang yang kongruen dengan jajar genjang diatas adalah ….



Solusi :

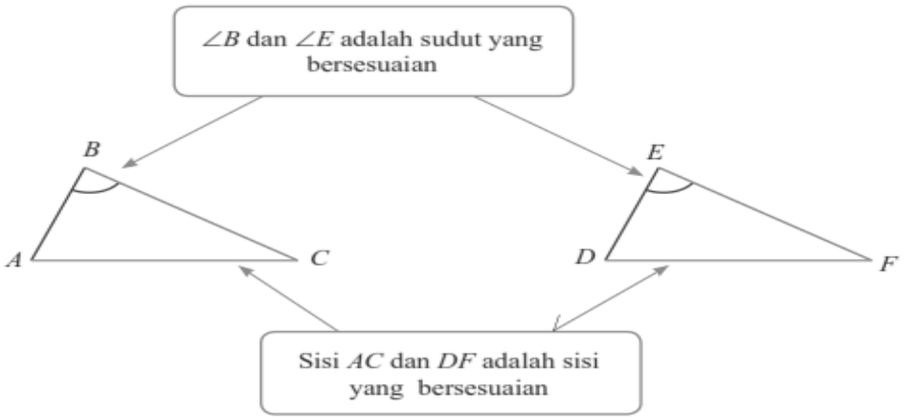
Perhatikan bahwa jumlah dari besar sudut sepihak dalam jajar genjang adalah 180^0. Dari gambar yang diberikan, besar salah satu sudut jajar genjang itu adalah 65^0. Ini artinya, sudut lain yang sepihak dengannya memiliki besar $180^0 - 65^0 = 115^0$. Berdasarkan opsi jawaban yang diberikan, hanya opsi D yang memenuhi kriteria ini (panjang sisinya juga sesuai/tepat sama).

Jawaban D.

2) **Kekongruenan Dua Segitiga**

Dua segitiga dikatakan kongruen jika hanya jika memenuhi syarat berikut ini :

1. Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang
2. Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar



Sisi-sisi yang bersesuaian:

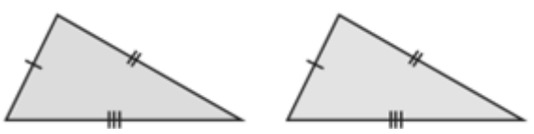
AB dan DE $\rightarrow$ $AB = DE$
BC dan EF $\rightarrow$ $BC = EF$
CA dan FD $\rightarrow$ $CA = FD$

Sudut-sudut yang bersesuaian:

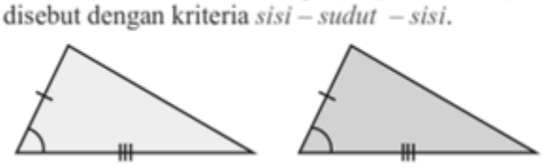
$\angle A$ dan $\angle D$ $\rightarrow$ $\angle A = \angle D$
$\angle B$ dan $\angle E$ $\rightarrow$ $\angle B = \angle E$
$\angle C$ dan $\angle F$ $\rightarrow$ $\angle C = \angle F$

Dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu kondisi berikut ini :

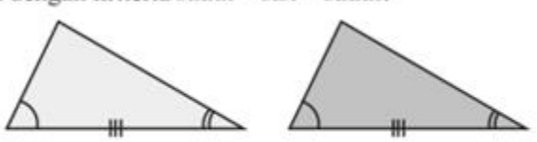
1. Ketiga pasangan sisi yang bersesuaian sama panjang. Biasa disebut dengan kriteria *sisi – sisi – sisi*.



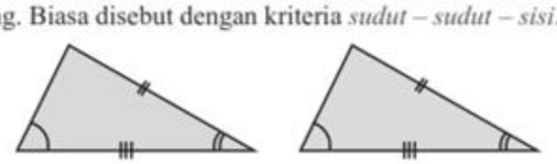
2. Dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sudut yang diapitnya sama besar. Biasa disebut dengan kriteria *sisi – sudut – sisi*.



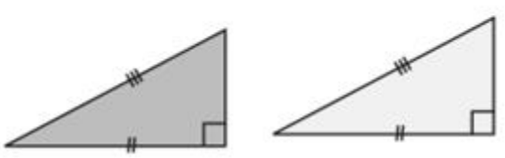
3. Biasa disebut dengan kriteria *sudut – sisi – sudut*.



4. Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sepasang sisi yang bersesuaian sama panjang. Biasa disebut dengan kriteria *sudut – sudut – sisi*.

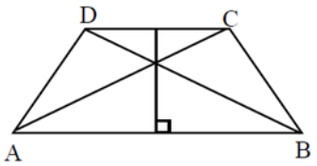


5. Khusus untuk segitiga siku-siku, sisi miring dan satu sisi siku yang bersesuaian sama panjang.



Contoh soal :

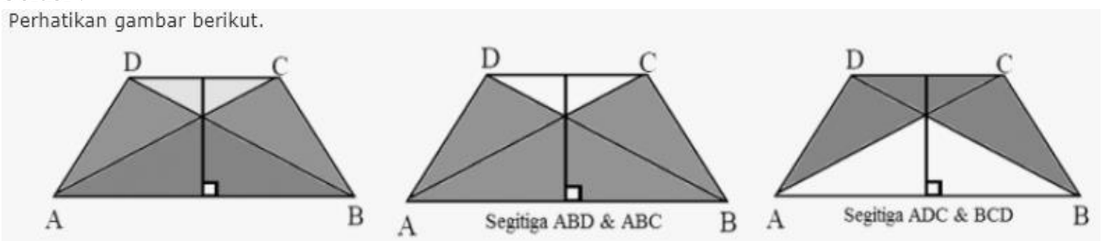
1. Perhatikan gambar berikut!



ABCD merupakan trapesium sama kaki. Banyak segitiga kongruen pada gambar tersebut adalah ….

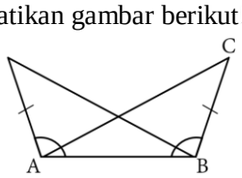
a. 4 pasang
b. 5 pasang
c. 6 pasang
d. 7 pasang

Solusi :



Dari gambar diatas, terdapat 5 pasang segitiga yang kongruen.

2. Perhatikan gambar berikut!

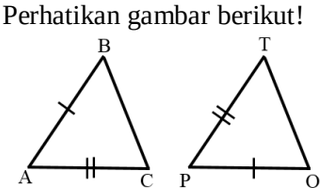


Segitiga ABD kongruen dengan segitiga BAC karena memenuhi syarat ….

Solusi :

Kedua segitiga memiliki satu pasang sudut yang sama besar, yaitu $\angle BAD = \angle ABC$. Sisi yang mengapit sudut tersebut juga sama panjang, yaitu sisi $AD = BC$ dan sisi AB berimpit. Jadi, kedua segitiga kongruen karena memenuhi syarat: sisi, sudut, sisi (posisi "sudut" di tengah karena sudut yang sama besar itu diapit oleh sisi yang sama panjang).

3. Perhatikan gambar berikut!



Segitiga ABC kongruen dengan segitiga POT. Pasangan sudut yang sama besar adalah ····

A. $\angle BAC$ dan $\angle POT$

B. $\angle BAC$ dan $\angle PTO$

C. $\angle ABC$ dan $\angle POT$

D. $\angle ABC$ dan $\angle PTO$

Diketahui: $ABC \cong POT$

Kedua segitiga memiliki persamaan panjang sisi:

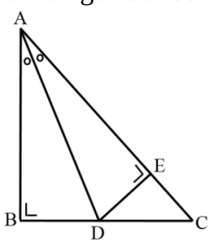
$AB = PO; AC = PT; BC = OT$

dan sudut yang sama besar:

$\angle BAC = \angle OPT; \angle ABC = \angle POT; \angle ACB = \angle PTO$

(Jawaban C)

4. Perhatikan gambar berikut !



Segitiga ABC siku-siku sama kaki dengan panjang AB = BC = 3 cm. AD adalah garis bagi sudut A. Panjang BD adalah ….

a. $\left(3-3\sqrt{2}\right)cm$
b. $\left(3\sqrt{2}-3\right)cm$
c. 3 cm
d. $3\sqrt{2}\ cm$

Solusi :

Segitiga ABD dan segitiga ADE kongruen menurut syarat: sudut, sudut, sisi, sehingga berlaku $AB = AE = 3\text{ cm}; BD = DE$. Karena segitiga ABC siku-siku, maka berlaku Teorema Pythagoras, yaitu

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

Dengan demikian,

$$EC = AC - AE = (3\sqrt{2} - 3)\text{ cm}$$

Karena ECD segitiga sama kaki dengan $EC = DE$, dan juga karena $DE = BD$, maka panjang BD adalah

$\boxed{(3\sqrt{2} - 3)\text{ cm}}$

(Jawaban B)

3) **Kesebangunan Bangun Datar**

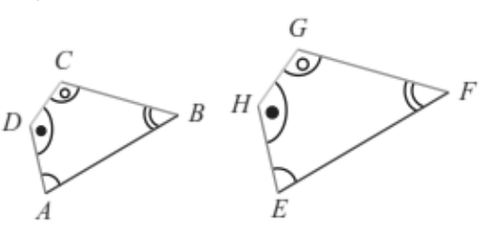
Dua bangun yang mempunyai bentuk yang sama dinamakan sebangun, tidak perlu ukurannya sama tetapi sisi-sisi yang bersesuaian sebanding (*proporsional*) dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Perubahan bangun satu mejadi bangun lain yang sebangun melibatkan perbesaran atau pengecilan. Dua bangun segi banyak (*polygon*) dikatakan sebangun jika memenuhi dua syarat, yaitu:

1. Perbandingan panjang sisi yang bersesuaian senilai

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{AD}{EH}$$

2. Sudut-sudut yang bersesuaian besarnya sama

$m\angle A = m\angle E$
$m\angle B = m\angle F$
$m\angle C = m\angle G$
$m\angle D = m\angle H$

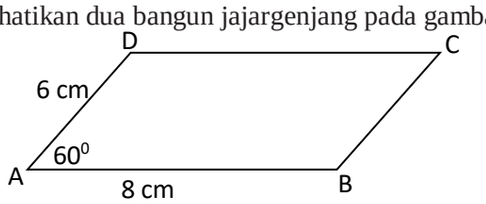


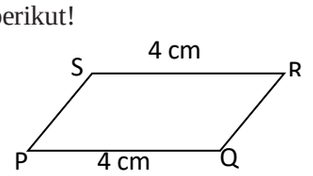
i. Jika bangun ABCD dan EFGH memenuhi kedua syarat tersebut, maka bangun ABCD dan EFGH **sebangun**, dinotasikan dengan ABCD ~ EFGH

ii. Jika bangun ABCD dan EFGH tidak memenuhi kedua syarat tersebut maka bangun ABCD dan EFGH tidak sebangun, dinotasikan dengan ABCD ≁ EFGH.

Contoh soal :

1. Perhatikan dua bangun jajargenjang pada gambar berikut!





Apakah kedua jajargenjang tersebut sebangun?

Solusi :

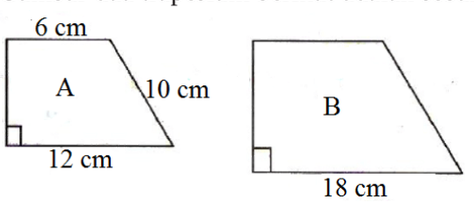
Sisi-sisi yang bersesuaian adalah :

$\overline{AB} = \overline{PQ}$, $\overline{DC} = \overline{SR}$, $\overline{AD} = \overline{PS}$, $\overline{BC} = \overline{QR}$

Perhatikan bahwa $\frac{AD}{PS} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, *sedangkan* $\frac{AB}{PQ} = \frac{8}{2}$

Karena $\frac{AD}{PS} \neq \frac{AB}{PQ}$ maka dapat dikatakan bahwa jajargenjang ABCD dan PQRS tidak sebangun. Kita tidak perlu mencari besar sudut – sudut yang bersesuaian.

2. Gambar dua trapesium berikut adalah sebangun.

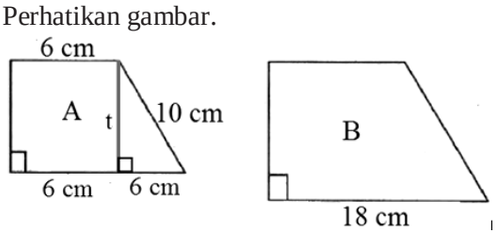


Luas trapesium B adalah ….

A. 129 cm^2
B. 162 cm^2
C. 192 cm^2
D. 324 cm^2

Solusi :

Perhatikan gambar.



Tinggi trapesium A dapat dihitung dengan menerapkan rumus Pythagoras, yaitu

$$t_A = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Pada trapesium B, sisi atas dapat ditentukan dengan perbandingan, yaitu

$$\frac{12}{18} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = \frac{6 \times 18}{12} = 9 \text{ cm}$$

Tinggi trapesium B juga dapat ditentukan dengan perbandingan.

$$\frac{12}{18} = \frac{8}{t_B} \Leftrightarrow t_B = \frac{18 \times 8}{12} = 12 \text{ cm}$$

Dengan demikian, luas trapesium B adalah

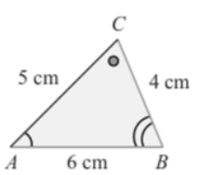
$$L_B = \frac{(18+9) \times 12^{6}}{\cancel{2}} = 27 \times 6 = 162 \text{ cm}^2$$

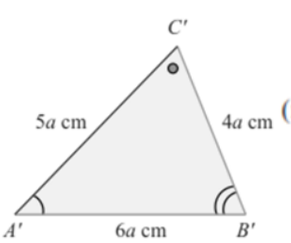
(Jawaban B)

4) **Kesebangunan Dua Segitiga**

Dua segitiga dikatakan sebangun jika hanya jika memenuhi syarat sebagai berikut ini :

1. Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai
2. Besar sudut-sudut yang bersesuaian sama





(i) Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = a$$

(ii) Besar sudut-sudut yang bersesuaian sama

$\angle A = \angle A'$

$\angle B = \angle B'$

$\angle C = \angle C'$

Jika ΔABC dan ΔDEF memenuhi syarat tersebut, maka ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ sebangun, dinotasikan dengan $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Jika ΔABC dan ΔDEF tidak memenuhi syarat tersebut maka maka ΔABCdan ΔDEF tidak sebangun, dinotasikan dengan $\Delta ABC \not\sim \Delta A'B'C'$.

Catatan:

Ketika menyatakan dua segitiga sebangunsebaiknya berdasarkan titik-titik sudut yang bersesuaian dan berurutan, contohnya:

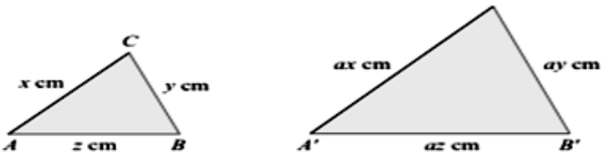
$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ atau $\Delta BAC \cong \Delta B'A'C'$ atau $\Delta CBA \cong \Delta C'B'A'$

bukan $\Delta ABC \cong \Delta B'C'A'$ atau $\Delta ABC \cong \Delta C'A'B'$ atau yang lainnya.

5) **Syarat Dua segitiga Sebangun**

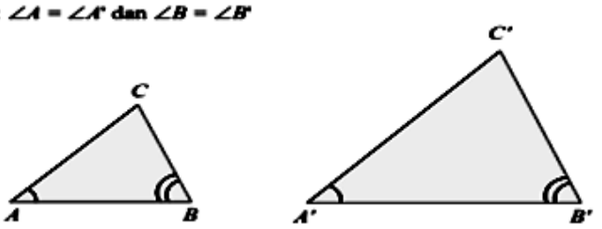
1. *Perbandingan ketiga pasangan sisi yang bersesuaian sama, yaitu*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = a$$



2. *Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar*

Contoh: $\angle A = \angle A'$ dan $\angle B = \angle B'$



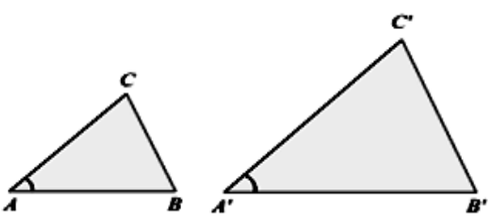
3. *Perbandingan dua pasang sisi yang bersesuaian sama dan sudut yang diapitnya sama besar.*

Contoh:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = a$$

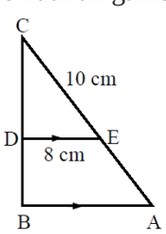
dan

$\angle A = \angle A'$



Contoh soal :

1. Perhatikan gambar berikut!



Jika DE : AB = 2 : 3, tentukan panjang BD!

Diketahui: $DE = 8\text{ cm}; CE = 10\text{ cm}$

Karena $DE : AB = 2 : 3$, maka

$$AB = \frac{3}{2} \times 8 = 12\text{ cm}$$

Pada segitiga siku-siku CDE, berlaku Teorema Pythagoras.

$$CD = \sqrt{CE^2 - DE^2}$$
$$= \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6\text{ cm}$$

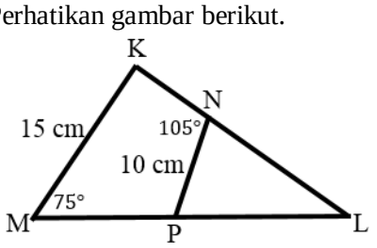
$\triangle CDE$ dan $\triangle ABC$ sebangun dengan $CD \sim CB$ dan $DE \sim BA$, sehingga

$$\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{BA}$$
$$\frac{6}{6 + DB} = \frac{8}{12}$$
$$6 + DB = \frac{6 \times 12}{8} = 9$$
$$DB = 9 - 6 = 3\text{ cm}$$

Jadi, panjang DB adalah $\boxed{3\text{ cm}}$

(Jawaban B)

2. Perhatikan gambar berikut.



Jika panjang $LM = 30\text{ cm}$ dan $LK = 24\text{ cm}$, maka panjang KN adalah $\cdots\cdot$

A. 4 cm C. 8 cm

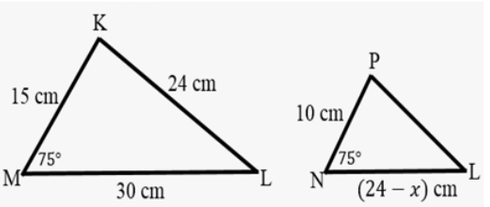
B. 6 cm D. 9 cm

Solusi :

Karena $\angle KNP$ dan $\angle PNL$ berpelurus, maka

$$\angle PNL = 180^\circ - \angle KNP = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Perhatikan gambar segitiga MLK dan PLN berikut.



Kedua tersebut saling sebangun dengan perbandingan sisi yang bersesuaian, yaitu $MK \sim NP, ML \sim NL$, dan $KL \sim PL$.

Misalkan panjang $KN = x$ cm, maka $NL = (24 - x)$ cm.

Dengan prinsip kesebangunan, diperoleh

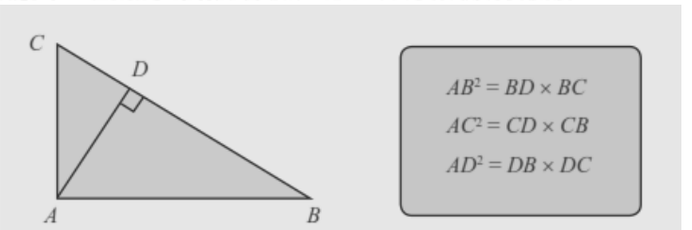
$$\frac{KM}{NP} = \frac{ML}{NL} \Rightarrow \frac{15}{10} = \frac{30}{24 - x}$$
$$24 - x = 20$$
$$x = 4$$

Jadi, panjang KN adalah $\boxed{4\text{ cm}}$

(Jawaban A)

6) ***Kesebangunan Khusus dalam Segitiga Siku-siku***

Perhatikan gambar. Berdasarkan Kegiatan 3, dengan memperhatikan bahwa $\Delta ABC \sim \Delta DBA$, $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ dan $\Delta DBA \sim \Delta DAC$, diperoleh:



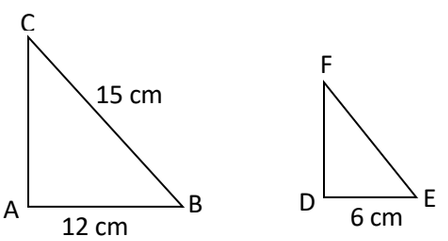
7) ***Menghitung Panjang Salah Satu Sisi yang Belum Diketahui dari Dua Segitiga yang Sebangun***

Untuk menghitung panjang salah satu sisi segitiga sebangun yang belum diketahui, dapat digunakan konsep kesebangunan dua segitiga.

Contoh soal :

1. Diketahui ΔABC *sebangun dengan* ΔDEF. Tentukan EF!

   Solusi :



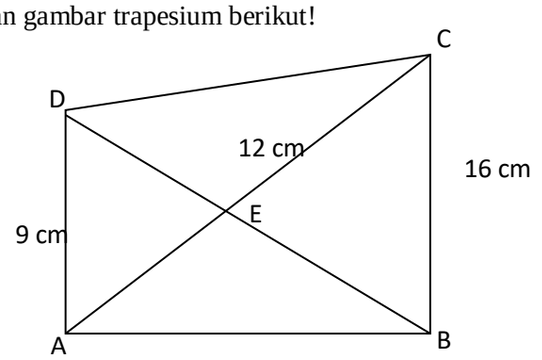
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{15}{EF}$$

$$\Leftrightarrow 2\,EF = 15$$

$$\Leftrightarrow EF = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

$$Jadi,\ EF = 7{,}5\ cm$$

2. Perhatikan gambar trapesium berikut!



   a. Apakah ΔAED *dan* ΔBCE *sebangun*? *Jelaskan*!

   b. Hitunglah AE!

   Solusi :

   a. Dari ΔAED *dan* ΔBCE tampak bahwa $\angle AED$ *dan* $\angle BEC$ bertolak belakang sehingga $\angle AED = \angle BEC$.

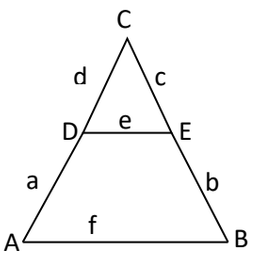
   Karena $\angle AED$ *dan* $\angle BEC$ bertolak belakang dan $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ maka $\angle DAE = \angle BCE$ sebab merupakan dua sudut sehadap pada dua garis sejajar yang dipotong oleh garis lain. Karena dua sudut yang bersesuaian sama besar, maka sudut ketiganya juga sama besar sehingga ΔAED *dan* ΔBCE sebangun.

b. $\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{CE} \Leftrightarrow \frac{9}{16} = \frac{AE}{12} \Leftrightarrow AE = 6{,}75$

$Jadi,\ AE = 6{,}75\ cm$

8) ***Garis-garis Sejajar pada Sisi Segitiga***

Perhatikan gambar berikut!



Pada gambar disamping, ΔABC *dan* ΔDEC *sebangun.* Pada dua segitiga yang sebangun, berlaku prbandingan sisi – sisi yang bersesuaian senilai.

Dari gambar terlihat bahwa ruas garis DE // AB sehingga diperoleh :

- $\angle ACB = \angle DCE$ (*berimpit*)
- $\angle CAB = \angle CDE$ (*sehadap*)

Karena dua sudut yang bersesuaian dari ΔABC *dan* ΔDEC sama besar, maka kedua segitiga tersebut sebangun, sehingga berlaku :

$\frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} = \frac{DE}{AB} \Leftrightarrow \frac{d}{a+d} = \frac{c}{c+b} = \frac{e}{f}$

Ambil persamaan $\frac{d}{a+d} = \frac{c}{c+b}$

Kedua ruas dikalikan $(a+d)\,(c+b)$ sehingga diperoleh :

$\frac{d}{a+d} . (a+d).(c+b) = \frac{c}{c+b} .\ (a+d).(c+b)$

$d\,.(c+b) = c\,.(a+d)$

$cd + bd = ac + cd$

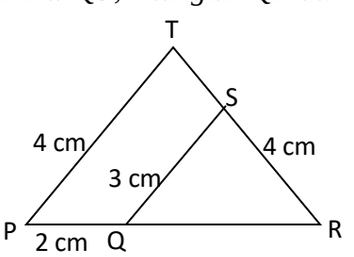
$bd = ac$

$\frac{d}{a} = \frac{c}{b}$

<u>Contoh soal :</u>

1. Dalam ΔPRT, $\overline{PT}$ // $\overline{QS}$, *hitunglah QR dan ST*!

Solusi :



Solusi :

- $\frac{QS}{PT} = \frac{QR}{PQ + QR}$

  $\Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{QR}{2 + QR}$

  $\Leftrightarrow 3 \times (2 + QR) = 4 \times QR$

  $\Leftrightarrow 6 + 3\,QR = 4\,QR$

  $\Leftrightarrow 6 = 4\,QR - 3\,QR$

  $\Leftrightarrow 6 = QR$

- $\frac{QS}{PT} = \frac{RS}{ST + RS} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{4}{4 + TS}$

  $\Leftrightarrow 3 \times (4 + TS) = 4 \times 4$

$\Leftrightarrow 12 + 3\,TS = 16$

$\Leftrightarrow 3\,TS = 16 - 12$

$\Leftrightarrow 3\,TS = 4$

$\Leftrightarrow TS = \frac{4}{3}$

Jadi, QR = 6 cm dan $TS = \frac{4}{3}\,cm$

9) Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan kesebangunan

Untuk menyelesaikan soal cerita, dapat dibantu dengan membuat sketsa atau gambar. Dari sketsa atau gambar itu, baru diselesaikan.

Contoh soal :

1. Sebuah kawat baja dipancangkan untuk menahan sebuah tiang listrik yang berdiri tegak lurus. Sebuah tongkat didirikan tegak lurus sehingga ujung tongkat menyentuh kawat. Diketahui panjang tongkat 2 m, jarak tongkat ke pangkal kawat 3 m dan jarak tiang listrik ke tongkat 6 m. Berapa tinggi tiang listrik?

   Dik : Misalkan tinggi tiang listrik = t
   panjang tongkat = 2 m,
   jarak kawat ke tongkat = 3 m
   jarak tiang listrik ke tongkat = 6 m

   Dit : tinggi tiang listrik = …?

   Solusi :

   $$\frac{tinggi\ tongkat}{tinggi\ tiang\ listrik} = \frac{jarak\ kawat\ ke\ tongkat}{jarak\ kawat\ ke\ tiang\ listrik}$$

   $$\frac{2}{t} = \frac{3}{3+6}$$

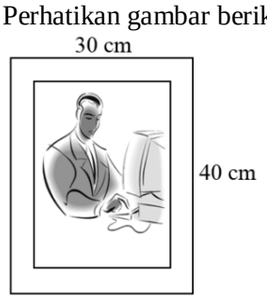
   $$3t = 2 \times (3+6)$$

   $$3t = 2 \times 9$$

   $$t = \frac{18}{3} = 6$$

   Jadi, tinggi tiang listrik adalah 6 m.

2. Perhatikan gambar berikut.



Sebuah foto ditempelkan pada karton seperti pada gambar. Di sebelah kiri dan kanan foto masih terdapat bagian karton masing-masing selebar 3 cm, sedangkan bagian atas dan bawah karton belum diketahui ukurannya. Diketahui bahwa foto dan karton sebangun.

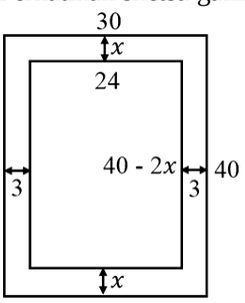
Luas karton yang tidak tertutup foto adalah $\cdots\ cm^2$

A. 288 C. 432

B. 324 D. 516

Solusi :

Perhatikan sketsa gambar berikut :



Dalam sketsa gambar di atas, dimisalkan x sebagai lebar bagian atas dan bawah karton terhadap foto. Karena karton dan foto sebangun, maka berlaku

$$\frac{30}{40} = \frac{24}{40-2x}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{24}{40-2x}$$

$$3(40-2x) = 4(24)$$

$$120 - 6x = 96$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$

Lebar foto $= 40 - 2x = 40 - 2(4) = 32$ cm

Luas karton yang tidak tertutup foto adalah luas karton dikurangi luas foto, yaitu

$$L = L_{\text{karton}} - L_{\text{foto}}$$

$$= (30 \times 40) - (24 \times 32)$$

$$= 1.200 - 768 = 432 \text{ cm}^2$$

(Jawaban C)

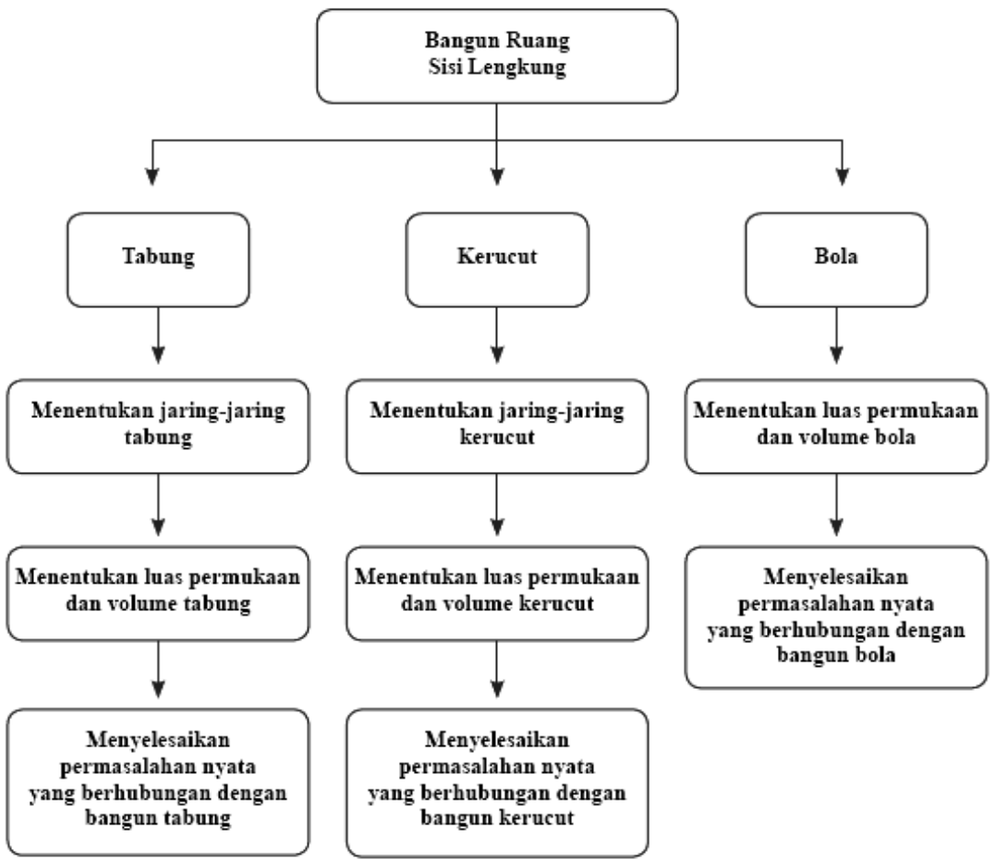
BAB 5

BANGUN RUANG SISI LENGKUNG

A. Kompetensi Dasar

3.7 Membuat generalisasi luas permukaan dan volumebangun ruang sisi lengkung (tabung, kerucut danbola).
4.7 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitandengan luas permukaan dan volume bangun ruang sisilengkung (tabung, kerucut, dan bola) serta gabunganbeberapa bangun ruang sisi lengkung.

B. Peta Konsep



C. Materi Ajar

Dalam kehidupan nyata sehari-hari, kita sering menjumpai bentuk kemasan makanan, peralatan olahraga, suku cadang mesin, sampai peralatan berteknologi tinggi, misalnya kaleng kemasan *cocktail*, piston mesin kendaraan, tempat es krim, bola tenis, kaleng tempat pensil, bola, tutup makanan atau tudung saji, cone es krim bertangkai, lampu neon dan sebagainya. Benda-benda itu dalam matematika dikenal sebagai bangun ruang sisi lengkung (BRSL). Ciri khas dari BRSL adalah bentuknya beraturan, biasanya mempunyai alas berbentuk lingkaran dan selalu memiliki unsur tinggi atau tebal bangun tersebut. Unsur ini sangat diperlukan untuk menghitung luas permukaan dan volume dari BRSL.

1) Tabung (Silinder)

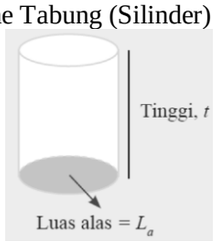
a. Pengertian

Tabung adalah bangun ruang sisi lengkung yang alas dan tutupnya beupa lingkaran yang kongruen atau sama dan sebangun (*sama bentuknya dan sama ukurannya*) dengan panjang jari-jari (radius) sebesar *r*. Jarak antara pusat alas dan pusat tutup disebut tinggi tabung (*t*). Sebuah tabung memiliki tiga sisi yakni dua sisi datar (sisi alas dan sisi tutup) dan satu sisi lengkung (selimut tabung). Benda-benda dalam kehidupan sehari-hari yang menyerupai tabung adalah tong sampah, kaleng susu, lilin, dan pipa.

b. Luas Permukaan (Luas Sisi)

1) Luas selimut tabung = $2\pi r \times t = 2\pi rt$
2) Luas alas = luas tutup tabung = πr^2
3) Luas permukaan tabung (lengkap) = $2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r + t)$
4) Luas permukaan tabung tanpa tutup = $\pi r^2 + 2\pi rt = \pi r(r + 2t)$

Volume Tabung (Silinder)



Volume tabung adalah hasil perkalian dari luas alas (***La***) tabung dengan tinggi tabung (***t***) atau dapat dirumuskan sebagai berikut :

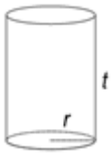
$$\boldsymbol{V = La \times t = \pi r^2 \times t = \pi r^2 t \text{ dengan } \pi = \frac{22}{7} \text{ atau } \pi = 3,14}$$

Apabila rumus volume tabung dinyatakan dalam diameter (*d*) maka rumus volume tabung menjadi :

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 t = \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^2 t = \frac{1}{4} \pi d^2 t}$$

c. Contoh Soal

Diberikan sebuah tabung tertutup yang memiliki jari-jari sebesar 20 cm dan tinggi 40 cm seperti gambar berikut.



Tentukan :

a) Volume tabung
b) Luas alas tabung
c) Luas tutup tabung
d) Luas selimut tabung
e) Luas permukaan tabung
f) Luas permukaan tabung jika tutupnya dibuka sama artinya luas tabung tanpa tutup

Solusi :

a) Volume tabung = luas alas x tinggi = $luas\ lingkaran \times t = \pi r^2 \times t$
$= 3,14 \times 20 \times 20 \times 40 = 50.240\ cm^3$
b) Luas alas tabung = luas lingkaran = $\pi r^2 = 3,14 \times 20 \times 20 = 1.256\ cm^2$
c) Luas tutup tabung = luas alas tabung= $\pi r^2 = 3,14 \times 20 \times 20 = 1.256\ cm^2$
d) Luas selimut tabung = $2\pi rt = 2 \times 3,14 \times 20 \times 40 = 5.024\ cm^2$
e) Luas permukaan tabung (lengkap) = $2\pi r^2 + 2\pi rt = 2\pi r(r + t)$
$= 2 \times 3,14 \times 20\ (20 + 40)$ = 6,28 x 20 x 60 = 125,60 x 60
$= 125,6 \times 60 = 7.536\ cm^2$

Atau luas permukaan tabung = luas selimut + luas alas + luas tutup
= 5.024 + 1.256 + 1.256 = 6.280 + 1.256 = 7.536 cm^2

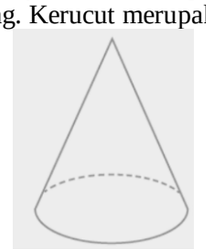
f) Luas permukaan tabung jika tutupnya dibuka = luas selimut + luas alas
= 5.024 + 1.256 = 6.280 cm^2

Atau luas permukaan tabung (lengkap) dikurangi dengan luas tutup = 7.536 – 1.256 = 6.280 cm^2

2) Kerucut

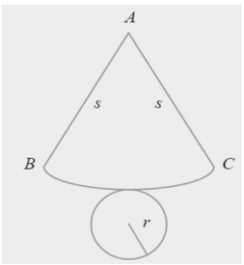
a. Pengertian

Kerucut adalah bangun ruang sisi lengkung yang dapat dibentuk dari tabung dengan mengubah tutup tabung menjadi titik. Titik tersebut biasanya disebut dengan titik puncak. Kerucut memiliki dua sisi, yaitu satu sisi datar dan satu sisi lengkung. Kerucut merupakan limas dengan alas lingkaran.



Benda-benda dalam kehidupan sehari-hari yang menyerupai kerucut adalah topi ulang tahun, topi petani, dan *cone* es krim.

b. Jaring-jaring Kerucut



AB dan AC adalah garis pelukis kerucut dimisalkan dengan s
Alas kerucut berbentuk lingkaran
r adalah jari-jari lingkaran

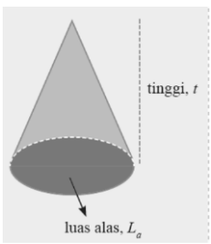
c. Luas permukaan Kerucut
Luas permukaan ekuivalen dengan jumlahan semua luas bangun penyusun dari jaring -jaring kerucut. Jaring-jaring kerucut terdiri atas satu lingkaran dan satu selimut yang berbentuk juring.

1) Luas alas kerucut = luas lingkaran = πr^2
2) Luas selimut kerucut = πrs
3) Luas permukaan kerucut = luas alas + luas selimut kerucut
   L = Luas Lingkaran + Luas Juring
   $= \pi r^2 + \pi rs$
   $= \pi r(r + s)$ dengan $s = \sqrt{r^2 + t^2}$

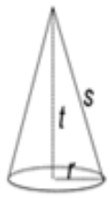
d. Volume Kerucut
Volume kerucut adalah $\frac{1}{3}$ bagian dari volume tabung dengan jari-jari dan tinggi yang sama atau dapat dirumuskan sebagai berikut.

$V = \frac{1}{3} La \times t$

$= \frac{1}{3} \pi r^2 \times t$



e. Contoh soal
Diberikan sebuah kerucut yang memiliki jari-jari sebesar r = 30 cm dan garis pelukis s = 50 cm seperti gambar berikut.



Tentukan :
a) Tinggi kerucut
b) Volume kerucut
c) Luas selimut kerucut
d) Luas permukaan kerucut

Solusi **:**

a) Tinggi kerucut *(dicari dengan dalil atau rumus pytagoras)* dimana

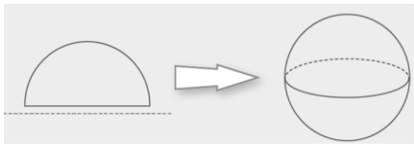
$$t^2 = s^2 - r^2 = 50^2 - 30^2 = 2.500 - 900 = 1.600$$
$$t = \sqrt{1.600} = 40\ cm$$

b) Volume kerucut = $\frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 30 \times 30 \times 40 = 37.680\ cm^3$

c) Luas selimut kerucut = $\pi rs = 3{,}14 \times 30 \times 50 = 4.710\ cm^2$

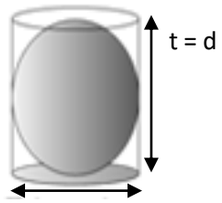
d) Luas permukaan kerucut = $\pi r(r + s) = 3{,}14 \times 30\ (30 + 50)$
$= 3{,}14 \times 30 \times 80 = 7.536\ cm^2$

3) Bola
a. Pengertian
Bola adalah bangun ruang sisi lengkung (BRSL) yang terjadi dari tumpukan empat buah lingkaran. Keempat lingkaran itu dinamakan kulit bola.



Penentuan luas sisi (permukaan) bola dapat kita lakukan dengan sebuah percobaan yang dahulu dilakukan oleh Archimedes, yaitu : ***sebuah bola menempati sebuah tabung yang diameter dan tinggi tabung sama tepat dengan diameter bola, maka luas bola itu sama dengan luas selimut tabung.***

Perhatikan gambar berikut.



d = 2r

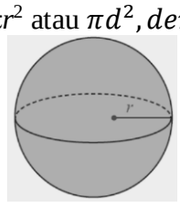
Luas selimut tabung = $2\pi r \times t = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

Benda dalam kehidupan sehari-hari yang berbentuk bola adalah bola olahraga (sepak bola, basket, voli dan lain-lain), kelereng, globe, dan lainnya.

b. Menentukan Luas Permukaan Bola

Luas permukaan bola adalah sama dengan 4 kali luas lingkaran yang memiliki jari-jari yang sama atau dapat dituliskan sebagai berikut :

1) $L = 4\pi r^2$ atau πd^2, dengan d = diameter



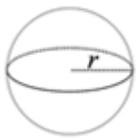
2) Luas belahan bola = $2\pi r^2$
3) Luas belahan bola padat = $3\pi r^2$, dengan r jari-jari bola

c. Menentukan Volume Bola

Volume bola adalah hasil kali $\frac{4}{3}\pi$ dengan pangkat tiga jari-jari bola tersebut atau dapat dituliskan sebagai berikut. $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$ ($\boldsymbol{\pi = \frac{22}{7}}$, ***jika jari – jari atau diameter adalah kelipatan dari*** **7**)

d. Contoh soal

Diberikan sebuah bola yang memiliki jari-jari sebesar 30 cm seperti gambar berikut.



Tentukan :

a) Volume bola
b) Luas permukaan bola

Solusi :

a) Volume bola $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 30 \times 30 \times 30 = 113.040\ cm^3$
b) Luas permukaan bola = $4 \times luas\ lingkaran = 4 \times \pi r^2 = 4 \times 3{,}14 \times 30 \times 30 = 11.304\ cm^2$

NB : volume $\frac{1}{2}$ *bola* $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1 \times 4}{2 \times 3}\pi r^3 = \frac{4}{6}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$

4) Contoh Soal Bangun Ruang Gabungan

1. Sebuah bola besi berada didalam tabung plastik terbuka bagian atasnya seperti terlihat pada gambar berikut.



Tabung kemudian diisi dengan air hingga penuh. Jika diameter dan tinggi tabung sama dengan diameter bola yaitu 60 cm, tentukan volume air yang tertampung oleh tabung!

Solusi :

Volume air yang bisa ditampung tabung sama dengan volume tabung dikurangi volume bola di dalamnya, dengan r_{tabung} = 30 cm, $r_{bola} = 30\ cm\ dan\ t_{tabung} = 60\ cm$

- $V_{tabung} = \pi r^2 t = 3{,}14 \times 30 \times 30 \times 60 = 169.560\ cm^3$
- $V_{bola} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 30 \times 30 \times 30 = 113.040\ cm^3$
- $V_{air} = V_{tabung} - V_{bola} = 169.560 - 113.040 = 56.520\ cm^3$

2. Diberikan dua buah bola dengan jari-jari masing-masing 10 cm dan 20 cm. Tentukan perbandingan volume kedua bola dan perbandingan luas pemukaan kedua bola!

Solusi :

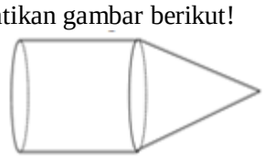
- Perbandingan volume dua buah bola akan sama dengan perbandingan pangkat tiga dari jari-jari masing-masing bola

$$V_1 : V_2 = {r_1}^3 : {r_2}^3$$
$$\frac{4}{3}\pi {r_1}^3 : \frac{4}{3}\pi {r_2}^3 = 10^3 : 20^3$$
$$10 \times 10 \times 10 : 20 \times 20 \times 20 = 1.000 : 8.000 = 1 : 8$$

- Perbandingan luas pemukaan kedua bola akan sama dengan perbandingan kuadrat jari-jari masing-masing bola

$$L_1 : L_2 = {r_1}^2 : {r_2}^2$$
$$4\pi {r_1}^2 : 4\pi {r_2}^2 = 10^2 : 20^2 = 100 : 400 = 1 : 4$$

3. Perhatikan gambar berikut!



Jari-jari dan tinggi tabung masing-masing 30 cm dan 60 cm, tinggi kerucut dan garis pelukisnya masing-masing adalah 40 cm dan 50 cm. Tentukan luas pemukaan bangun diatas!

Solusi **:**

Bangun di atas adalah gabungan tabung tanpa tutup dan kerucut tanpa alas atau selimutnya saja. Cari luas masing-masing kemudian jumlahkan.

- Luas tabung tanpa tutup = $2\pi rt + \pi r^2 = (2 \times 3{,}14 \times 30 \times 60) + (3{,}14 \times 30 \times 30) = 11.304 + 2.826 = 14.130\ cm^2$
- Luas selimut kerucut = $\pi rs = 3{,}14 \times 30 \times 50 = 94{,}2 \times 50 = 4.710\ cm^2$
- Luas pemukaan bangun = luas tabung tanpa tutup + luas selimut kerucut = 14.130 cm^2 + 4.710 cm^2 = 18.840 cm^2.

Daftar Pustaka

Adinawan, Cholik dan Sugijono. *Matematika SMP/MTs Jilid 3A Kelas IX berdasarkan Kurikulum 2013*. Jakarta : Erlangga, 2015.

Adinawan, Cholik dan Sugijono. *Matematika SMP Jilid 3B Kelas IX berdasarkan Standar Isi 2006*. Jakarta : Erlangga, 2007.

https://matematikastudycenter.com/smp/57-9-smp-soal-pembahasan-bangun-ruang-sisi-lengkung

Subchan, dkk. *Buku Guru MatematikaCetakan Ke-2 Edisi Revisi 2018*. Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.

Subchan, dkk. *Buku Siswa MatematikaCetakan Ke-2 Edisi Revisi 2018*. Jakarta : Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018.

Sukino dan Simangunsong, Wilson. *Matematika untuk SMP Jilid 3 Kelas IX berdasarkan Standar Isi 2006*. Jakarta : Erlangga, 2007.

Sukismo,dkk. *Fokus UN 2019 SMP/MTs Rangkuman Materi Soal Tipe UN Prediksi Soal UN 2019*. Jakarta : Erlangga, 2019.

Ruteng, Januari 2023
Guru Mata Pelajaran

Maria Krensensiana Bhala, S.Pd