# APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS:

*Resumen del capítulo 4, partes 4.5,4.6 y 4.7 del libro Elementos del electromagnetismo de Matthew N. O. Sadiku.*

## Extra: 4.4. Densidad de flujo eléctrico

Se define la densidad de flujo eléctrico **D** (en $C/m^2$) como aquel *campo vectorial* independiente del medio dado por

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}}$$ (Ec. 4.35, p.122)

## 4.5. Ley de Gauss-Ecuación de Maxwell

"*La **Ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico total $\Psi$ a través de cualquier superficie **cerrada** es igual a la carga total encerrada por esta superficie*"

$$\Psi = Q_{enc}$$ (Ec. 4.39,p.125)

Como $\Psi = \oint d\Psi = \oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$ y $Q_{enc} = Q = \oint \rho_v dv$,

**Ley de Gauss (forma integral)-1ra Ec. de Maxwell**

$$\boxed{\Psi = \boxed{Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv}}$$ (Ec.4.41,p.125)

Que aplicando el **Teorema de la divergencia**:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv$$ (Ec.4.42,p.125)

donde

**Ley de Gauss (forma diferencial o puntual)- 1ra Ec. de Maxwell**

$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}}$$ (Ec.4.43.,p.125)

**Aclaración**:

- La ley de Gauss es una formulación alternativa a la Ley de Coulomb.
- La ley de Gauss aporta un medio simple para hallar **E** o **D** en el caso de *distribuciones simétricas de carga* (carga puntual, carga de línea infinita, carga superficial cilíndrica infinita y distribución esférica de carga), pero también se sostiene aun si la distribución de carga no es simétrica:

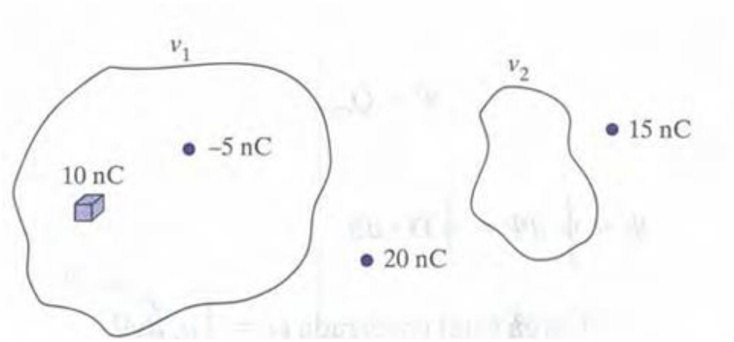



**Figura 4.12.** Ilustración de la ley de Gauss; el flujo que sale de $v_1$ es de 5 nC, y el que sale de $v_2$ de 0 C.

P.d. En este caso para hallar **E** o **D** habrá que recurrir a la Ley de Coulomb.

## 4.6. Aplicaciones de la Ley de Gauss

Para obtener el campo eléctrico por medio de la Ley de Gauss, se debe detectar una distribución simétrica de carga y elaborar una superficie gaussiana donde **D** debe ser normal ($\boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = D \cdot dS$) o tangencial ($\boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S}$=0) a la misma. Así:

A) **Carga puntual:**

Se demuestra que:

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_r}$$

(Ec.4.45,p.127)

En concordancia con la Ley de Coulomb.

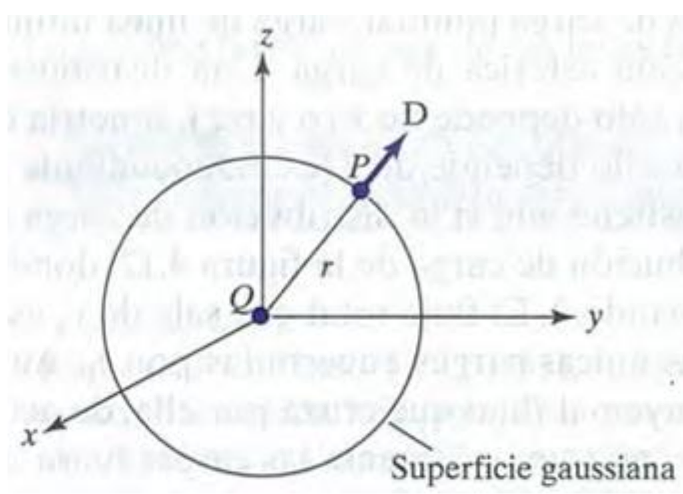



**Figura 4.13.** Superficie gaussiana alrededor de una carga puntual.

B) **Carga de línea infinita**:

Se demuestra que $\rho_L \ell = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS = D_\rho 2\pi\rho\ell$ , y esto lleva a que:

$$\boxed{\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho}$$

(Ec.4.47,p.127)

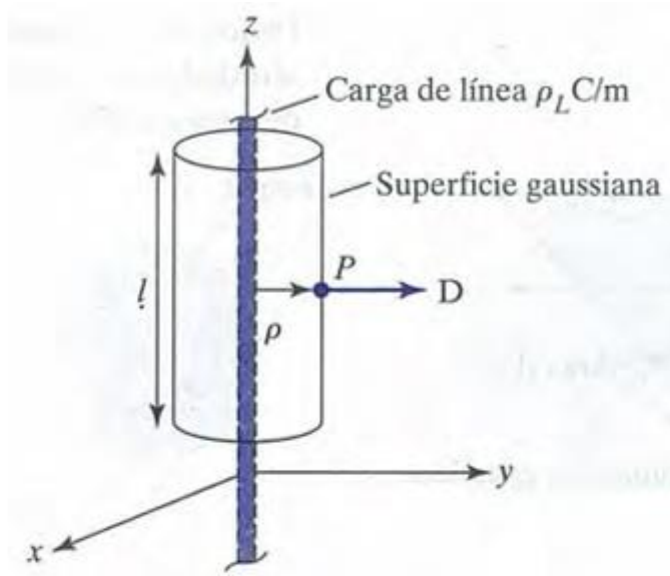



**Figura 4.14.** Superficie gaussiana alrededor de una carga de línea infinita.

C) **Lámina infinita de carga**

Suponiendo como en la fig. 4.15 un campo $\mathbf{D}$=D$\boldsymbol{a_z}$ generado por la placa ubicada en el plano z=0, la aplicación de la Ley de Gauss da por resultado

$$\rho_S \int dS = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_z \left[ \int_{\text{superior}} dS + \int_{\text{inferior}} dS \right]$$

Como no hay contribuciones del campo D en los ejes “x” e “y”, el flujo en los lados de la caja es cero; y considerando las dos superficies de la caja (superior e inferior), se llega a que $\rho_S A = D_z (A + A)$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\rho_S}{2}\mathbf{a}_z \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\mathbf{a}_z \end{aligned}}$$

(Ec. 4.50.,p.128)

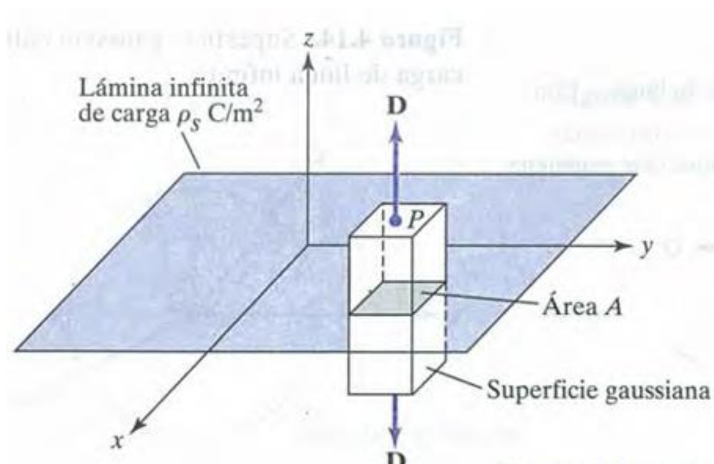



**Figura 4.15.** Superficie gaussiana alrededor de una lámina infinita de carga lineal.

## D) Esfera con carga uniforme (esfera aislante con carga volumétrica uniforme distribuida en su volumen)

Dada una esfera de radio “a” cargada uniformemente (con $\rho_v$), se demuestra que el campo **D** generado por esta en un punto P ubicado a una distancia “r” está dado por:

$$\boxed{\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{r}{3}\rho_v\,\mathbf{a}_r & 0 < r \leq a \\[2ex] \dfrac{a^3}{3r^2}\rho_v\,\mathbf{a}_r & r \geq a \end{cases}} \qquad \text{(Ec. 4.57.,p.130)}$$

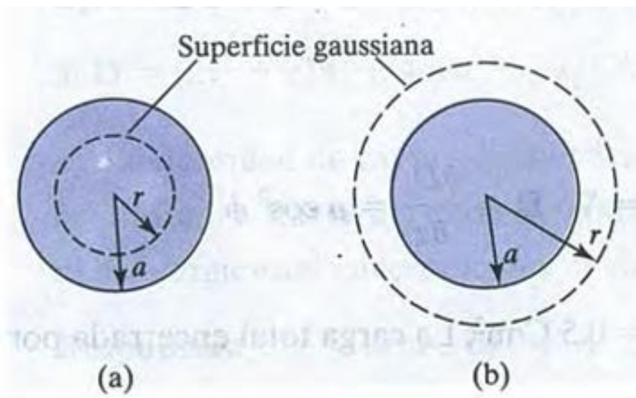



**Figura 4.16.** Superficie gaussiana para una esfera uniformemente cargada cuando: **(a)** r ≥ *a* y **(b)** *r* ≤ *a*.

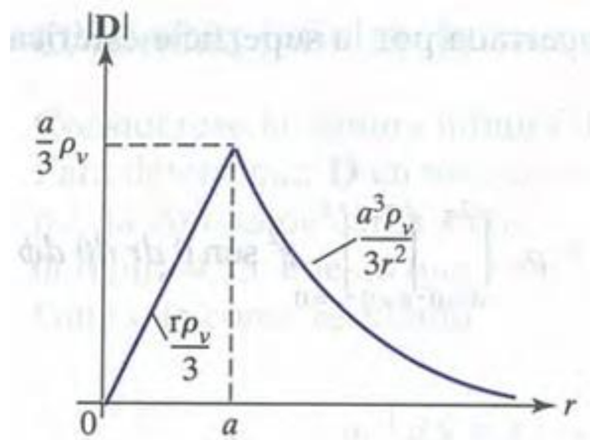


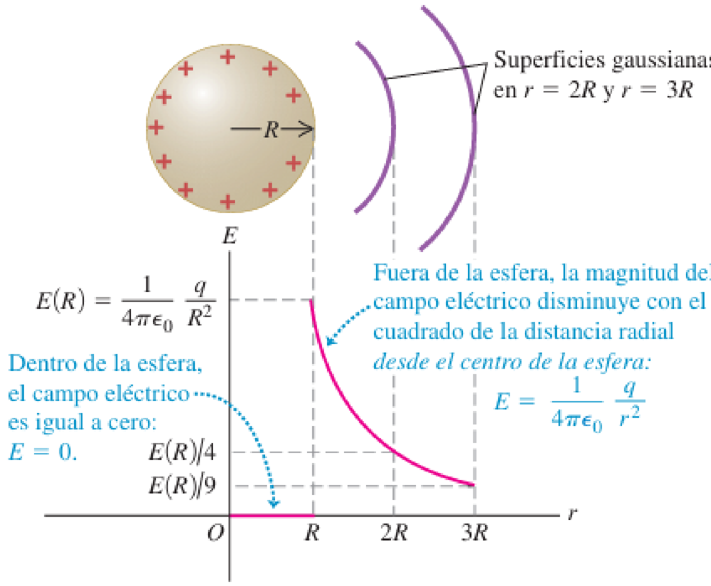

**Figura 4.17.** Diagrama de |**D**| contra *r* en el caso de una esfera con carga uniforme.

Extra) **Esfera conductora en equilibrio electrostático:**

En el caso de una esfera conductora, toda la carga se concentra en su superficie, esto lleva a que el flujo, y por ende **el campo eléctrico E *dentro de la esfera* (para r<R) sea cero Ψ=Qenc=0**.

En cambio, se demuestra que el campo eléctrico **E** en cualquier punto *afuera de la esfera* (r>R) es:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}}$$




**Fuente:** Freedman,Y., Zemansky,S.(s.f). *Física universitaria con Física Moderna*. Vol.2. 12.ª ed.(p.762)