📜 A teljes matematikai bizonyítás (Modulo 11 szűrő)

A grafikus kép alapján sejthetjük a megoldást, de vajon létezik-e másik egész számpár? A számelmélet segítségével bebizonyíthatjuk, hogy nincs. Vizsgáljuk meg az egyenletet modulo 11 (azaz a 11-gyel való osztási maradékok szempontjából)!

Az eredeti egyenlet:

$$x^5 + y^5 - 2027x^3 - 1954x^2 + 1222x = 575747$$

1. lépés: Az együtthatók redukálása modulo 11

Osszuk le az együtthatókat és a konstans tagot 11-gyel, és csak a maradékokat tartsuk meg:

- $2027 = 11 \cdot 184 + 3 \Longrightarrow \mathbf{3}$
- $1954 = 11 \cdot 177 + 7 \Longrightarrow \mathbf{7} \equiv \mathbf{-4}$
- $1222 = 11 \cdot 111 + 1 \Longrightarrow \mathbf{1}$
- $575747 = 11 \cdot 52340 + 7 \Longrightarrow \mathbf{7}$

Az egyenlet egyszerűsített alakja modulo 11:

$$x^5 + y^5 - 3x^3 + 4x^2 + x \equiv 7 \pmod{11}$$

Rendezzük át úgy, hogy az y^5 kifejezhető legyen:

$$y^5 \equiv -x^5 + 3x^3 - 4x^2 - x + 7 \pmod{11}$$

2. lépés: Az ötödik hatványok csodája (Kis Fermat-tétel)

A kis Fermat-tétel közvetlen következményeként bármely egész szám 5. hatványa modulo 11 **kizárólag háromféle** maradékot adhat: **0, 1 vagy -1 (azaz 10)**.
Ez azt jelenti, hogy a fenti egyenlet jobb oldalának is csak ezen három érték valamelyikét szabad felvennie!

3. lépés: Maradéktáblázat készítése

Ha a diákok végignézik az x lehetséges maradékait 0-tól 10-ig, a jobb oldali kifejezésre az alábbi értékeket kapják:

$x \pmod{11}$	Jobb oldal értéke $\pmod{11}$	Elfogadható? (0, 1 vagy 10?)
0	$0+0-0-0+7=\mathbf{7}$	❌ Nem
1	$-1+3-4-1+7=\mathbf{4}$	❌ Nem
2	$-32+24-16-2+7\equiv\mathbf{3}$	❌ Nem
3	$-243+81-36-3+7\equiv\mathbf{8}$	❌ Nem
4	$-1024+192-64-4+7\equiv\mathbf{2}$	❌ Nem
5	$-3125+375-100-5+7\equiv\mathbf{6}$	❌ Nem
6	$\ldots\equiv\mathbf{8}$	❌ Nem
7	$\ldots\equiv\mathbf{3}$	❌ Nem
8	$\ldots\equiv\mathbf{9}$	❌ Nem
9	$-(9)^5+3(9)^3-4(9)^2-9+7\equiv\mathbf{10}$	**IGEN**
10	$-100000+3000-400-10+7\equiv\mathbf{5}$	❌ Nem

Következtetés

A táblázatból egyértelműen látszik, hogy az egyenletnek **csak akkor** lehet megoldása, ha x osztási maradéka 11-gyel osztva pontosan **9**.

Mivel a GeoGebra füzet grafikus képe alapján a lehetséges tartományban egyetlen x érték jöhet szóba, az $x=20$, ez tökéletesen passzol a feltételünkbe, hiszen $20=1\cdot 11+\mathbf{9}$.

Behelyettesítve $x=20$-at, a jobb oldal értéke 10 lesz. Mivel $y=27\Longrightarrow 27\equiv 5 \pmod{11}$, és $5^5=3125\equiv\mathbf{10} \pmod{11}$, az egyetlen egész számpár megoldás valóban az $(\mathbf{20,27})$.