FUNCIONES

REPRESENTACIÓN DE GRÁFICAS - 1º BACHILLERATO -

1.- Estudia y representa la siguiente función: $f(x) = x^3 + 3x^2$

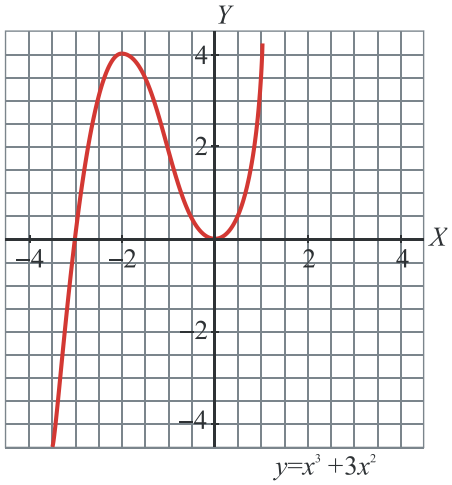
Solución:

- $\lim_{x\to+\infty}(x^3+3x^2) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2) = -\infty$
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \to x^3+3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3)=0 \begin{cases} x=0 \to \text{Punto } (0,0) \\ x=-2 \to \text{Punto } (-2,4) \end{cases}$

  Con el eje Y: $x=0 \Rightarrow y=0 \to \text{Punto}(0,0)$
- Puntos singulares:

  $f'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)=0 \begin{cases} x=0 \to \text{Punto } (0,0) \\ x=-2 \to \text{Punto } (-2,4) \end{cases}$
- Gráfica:



2.- Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x}{x-3}$$

estudia sus aspectos más relevantes y represéntala gráficamente.

Solución:

- Dominio = **R** − {3}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \to y=0 \to \frac{3x}{x-3}=0 \to x=0 \to \text{Punto}(0,0)$

  Con el eje $Y \to x=0 \to y=0 \to \text{Punto}(0,0)$
- Asíntota vertical: $x=3$

  $\lim_{x\to3^-}\frac{3x}{x-3} = -\infty$; $\lim_{x\to3^+}\frac{3x}{x-3} = +\infty$

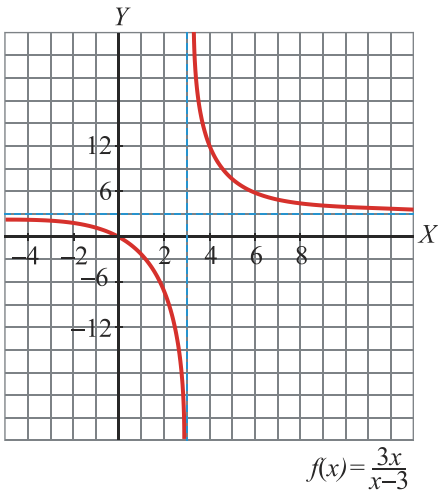
  Asíntota horizontal: $y=3$

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, con $y>3$

  $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, con $y<3$
- Puntos singulares:

  $f'(x)\frac{3(x-3)-3x}{(x-3)^2} = \frac{3x-9-3x}{(x-3)^2} = \frac{-9}{(x-3)^2} \neq 0$

  No tiene puntos singulares.



3.- Representa:

$$f(x) = \frac{x^3-2}{x}$$

- Dominio = **R** − {0}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \to y=0 \to \frac{x^3-2}{x}=0 \to x^3-2=0 \to$

  $\to x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}3 \to \text{Punto}(1{,}3;\ 0)$

  Con el eje $Y \to$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no pertenece al dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

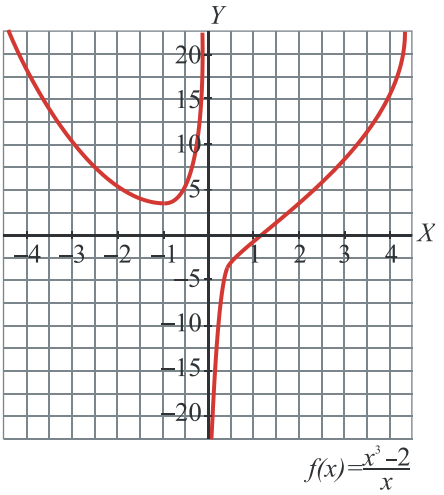
  $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty;$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es de dos unidades mayor que el del denominador).

  $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty;$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 x - (x^3 - 2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x^3 + 2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2} = \frac{2(x^3 + 1)}{x^2}$$



$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x^3 + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \rightarrow \text{Punto } (-1, 3)$$

4.-Representa: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}}$

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$
- No tiene asíntotas verticales.

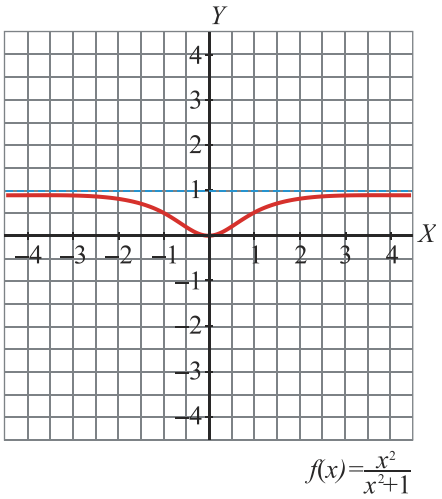
  Asíntota horizontal: $y = 1$

  $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1,$ con $y < 1$

  $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1,$ con $y < 1$
- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

  $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$
- Gráfica:



5.- Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}}$$

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

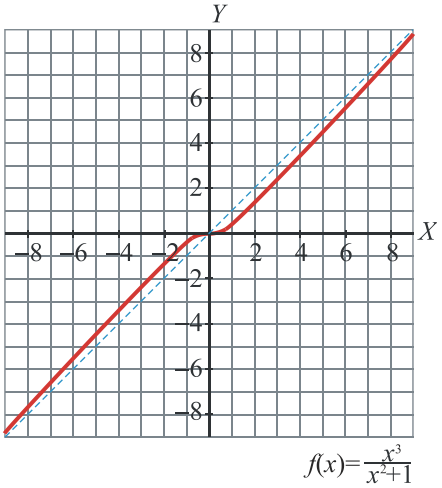
Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$
- Asíntotas verticales: No tiene

  Asíntota oblicua:

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x + \frac{-x}{x^2 + 1} \Rightarrow y = x \text{ es asíntota oblicua}$$

.

Si $x \to +\infty,$ $\frac{-x}{x^2 + 1} < 0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.



Si $x \to -\infty$, $\dfrac{-x}{x^2+1} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = 0 \to \text{Punto}\,(0,\,0)$$

6.- Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 1}$$

- Dominio = **R** – {1, 1}
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to \quad y = 0 \quad \to \quad x^4 - 4 = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt[4]{4} \approx \pm 1{,}4 \to$

$\to$ Puntos $(-1{,}4;\ 0)$ y $(1{,}4;\ 0)$

Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 4 \quad \to \quad$ Punto $(0,\,4)$

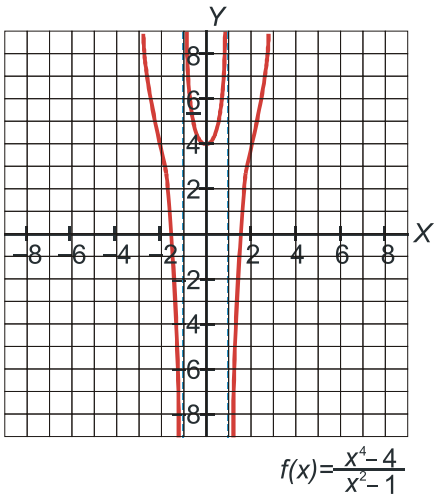
- Asíntotas verticales: $x = -1,\ x = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-1) - (x^4-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^5 - 4x^3 - 2x^5 + 8x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^5 - 4x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 4)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad \text{Punto}\,(0,\,4) \\ x^4 - 2x^2 + 4 = 0 \quad \to \quad x^2 = z;\ z^2 - 2z + 4 = 0;\ z = \dfrac{2 + \sqrt{4-16}}{2} \end{cases}$$

(No tiene solución)

7.- Estudia y representa la función: $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^2 + 1}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 2x^2 + 1) = +\infty; \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 2x^2 + 1) = +\infty$
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to \quad x^4 + 2x^2 + 1 = 0$. Cambio $x^2 = z$

$z^2 + 2z + 1 = 0$

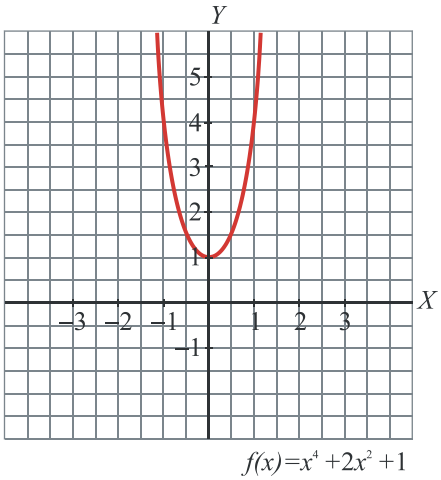
$z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$ (no nos da un valor real para x).

No corta al eje X.

Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = 1 \quad \to \quad$ Punto $(0,\,1)$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \to \quad$ Punto $(0,\,1)$



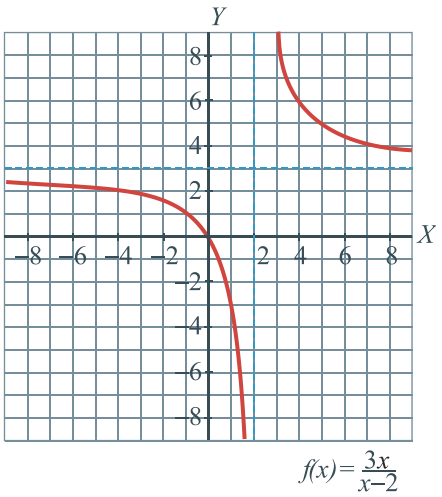
8.- Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{3x}{x-2}$$

- Dominio = **R** $-$ {2}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{3x}{x-2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$



- Asíntota vertical: $x=2$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty \quad ; \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota horizontal: $y=3$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x-2}=3,\ \text{con}\ \ y>3$

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x}{x-2}=3,\ \text{con}\ \ y<3$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}\neq 0$$

No tiene puntos singulares.

9.- Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x+2}$$

- Dominio = **R** $-$ {-2}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{x+2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

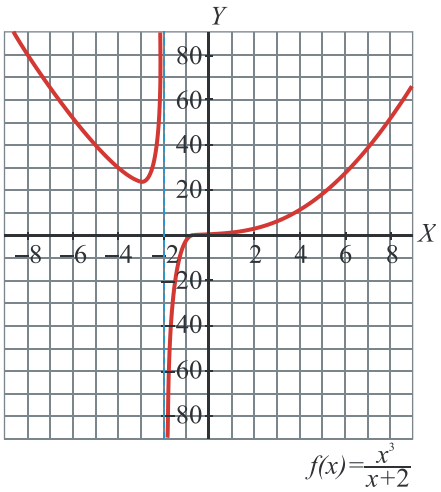
  Con el eje $Y \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

- Asíntota vertical: $x=-2$

  $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

- Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x+2)-x^3}{(x+2)^2}=\frac{3x^3+6x^2-x^3}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+6x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2(x+3)=0 \quad \begin{cases} x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (0,\,0) \\ x=-3 \quad \rightarrow \quad \text{Punto} \quad (-3,\,27) \end{cases}$$

10.- Representa $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2}$

- Dominio = **R** $-$ {0}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2+1=0 \quad \rightarrow$ No corta al eje X.

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no pertenece al dominio.

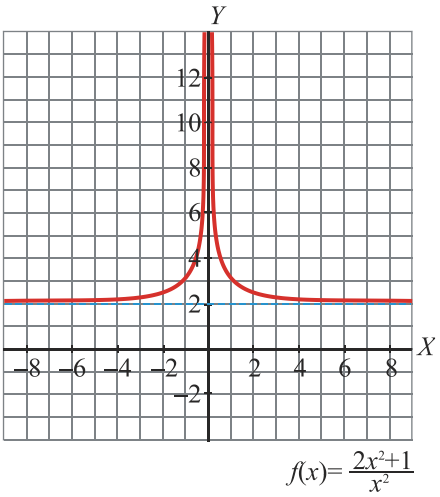
- Asíntota vertical: $x=0$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

- Asíntota horizontal: $x = 2$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, con $y > 2$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x \cdot x^2 - \left(2x^2 + 1\right) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:

11.- Representa $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

- Dominio = **R** − {0}
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow \dfrac{x^3 + 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{-4} \approx -1{,}6 \rightarrow$ Punto $(-1,\ 6;\ 0)$

Con el eje $Y \rightarrow$ No corta el eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

Asíntota oblicua:

$\dfrac{x^3 + 4}{x^2} = x + \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{4}{x^2} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

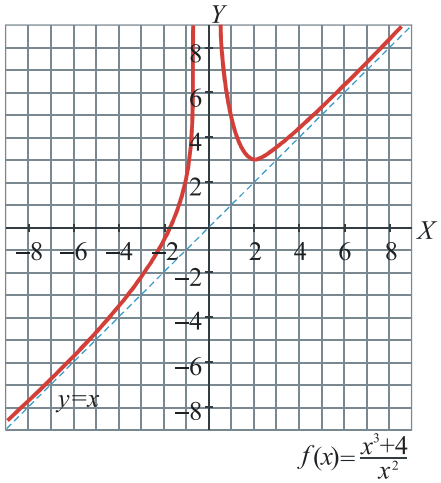
Si $x \to -\infty$, $\dfrac{4}{x^2} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - \left(x^3 + 4\right) \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x\left(x^3 - 8\right)}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

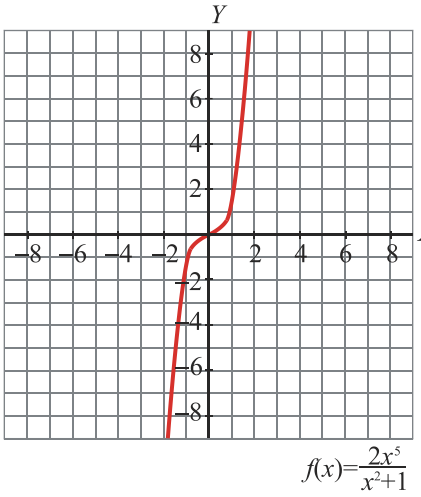
$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow$ Punto $(2,\ 3)$

- Gráfica:

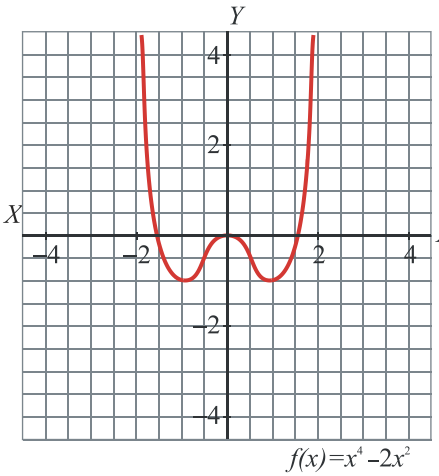


FUNCIONES

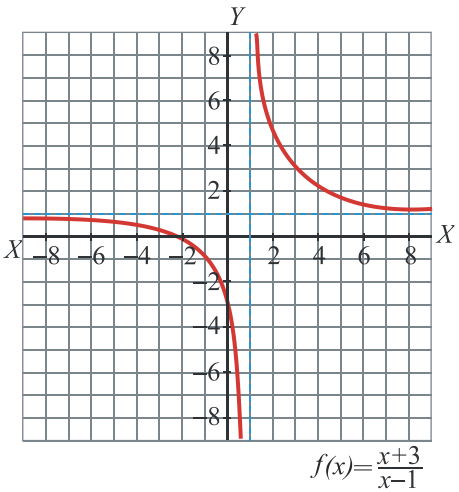
12.- $f(x) = \dfrac{2x^5}{x^2+1}$



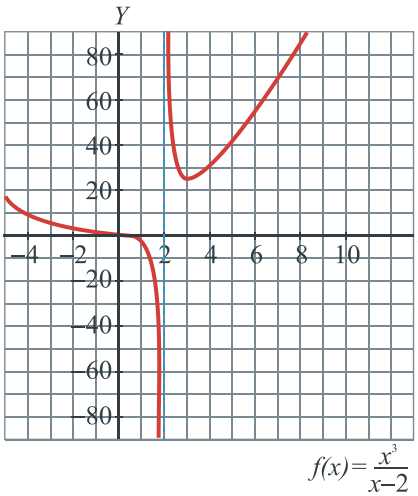
13.- $f(x) = x^4 - 2x^2$



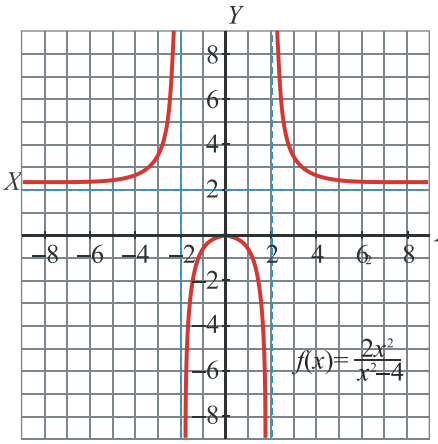
14.- $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$



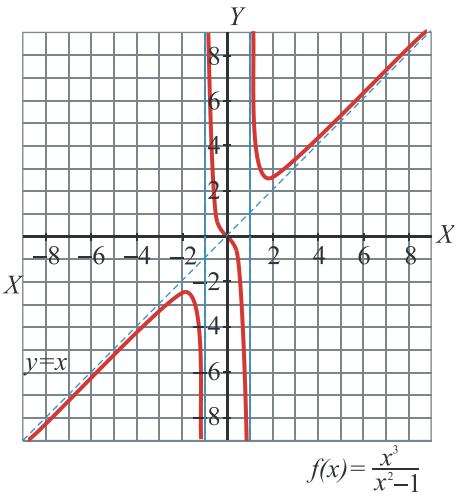
15.- $f(x) = \dfrac{x^3}{x-2}$



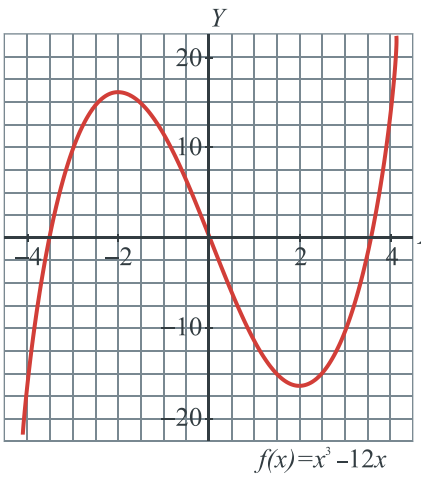
16.- $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-4}$



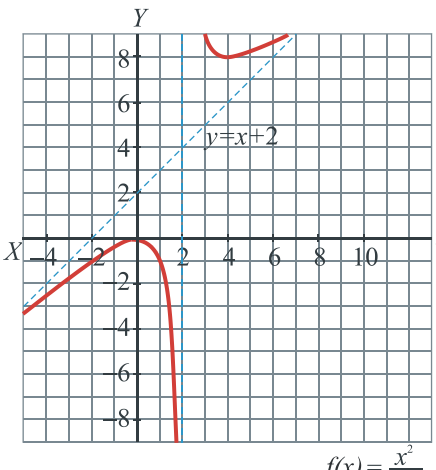
17.- $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$



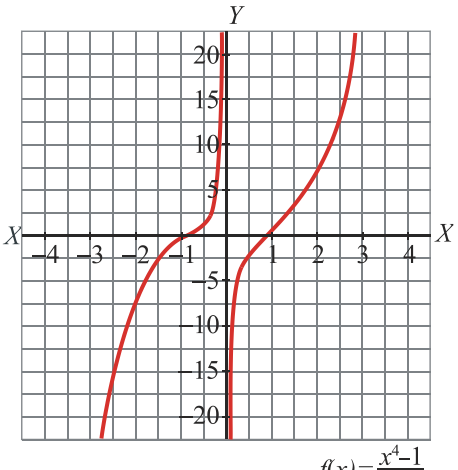
18.- $f(x) = x^3 - 12x$



19.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$



20.- $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x}$



Ejercicio nº 12.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{2x^5}{x^2+1}$$

Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes:

$$\text{Con el eje } X \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad 2x^2=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(0,\,0)$$
$$\text{Con el eje } Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(0,\,0)$$

- Asíntotas verticales: No tiene.

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

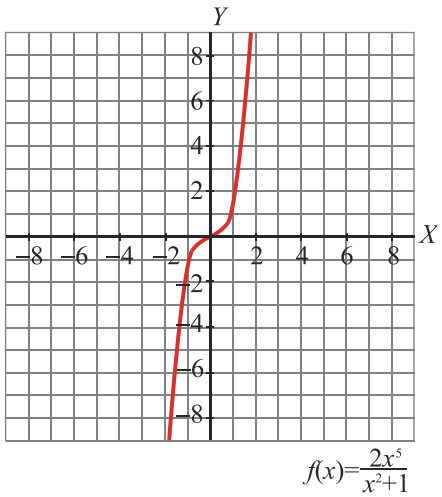
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{10x^4\left(x^2+1\right)-2x^5\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{10x^6+10x^4-4^6}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{6x^6+10x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^4\left(3x^2+5\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^4\left(3x^2+5\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(0,\,0)$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 13.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=x^4-2x^2$$

Solución:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty;\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^2\right)=+\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

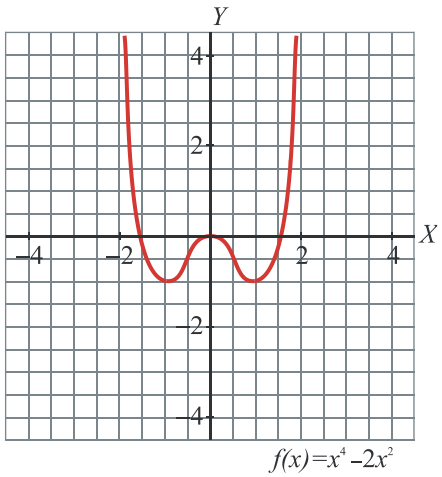
  Con el eje $X \rightarrow x^4-2x^2=0 \Rightarrow x^2\left(x^2-2\right)=0 \begin{cases} x=-\sqrt{2} \rightarrow \text{Punto}\,(-\sqrt{2},\ 0) \\ x=0 \rightarrow \text{Punto}\ (0,\ 0) \\ x=-\sqrt{2} \rightarrow \text{Punto}\,(-\sqrt{2},\ 0) \end{cases}$

  Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow$ Punto (0,0)

- Puntos singulares:

  $f'(x)=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)=0 \begin{cases} x=-1 \rightarrow \text{Punto}\ (-1,-1) \\ x=0 \rightarrow \text{Punto}\ (0,\ 0) \\ x=1 \rightarrow \text{Punto}\ (1,-1) \end{cases}$

- Gráfica:



Ejercicio nº 14.-

Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x+3}{x-1}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {1}

- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x+3}{x-1}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3 \rightarrow$ Punto $(-3,\ 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=\frac{3}{-1}=-3 \rightarrow$ Punto $(0,-3)$

- Asíntota vertical: $x=1$

  $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty;\qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota horizontal: $y=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, con $y > 1$

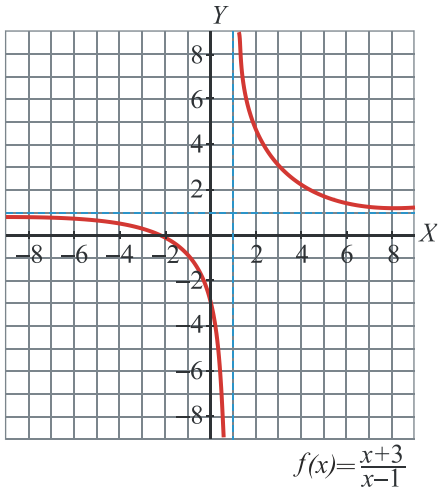
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, con $y < 1$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-3}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2} \neq 0$$

No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



Ejercicio nº 15.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x-2}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {2}
- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^3}{x-2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0, 0)$

- Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$

Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el grado del denominador).

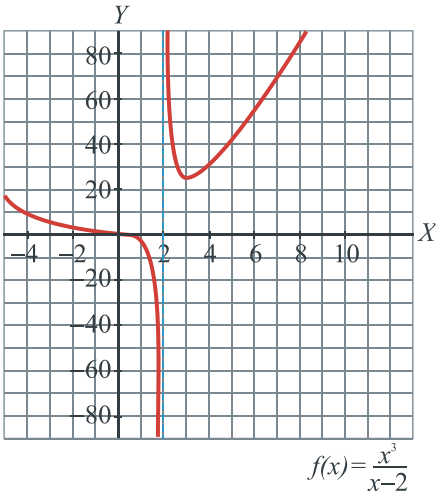
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto} \ \ (0,\,0) \\ \\ x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto} \ \ (3,\,27) \end{cases}$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 16.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2x^2}{x^2-4}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {−2, 2}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \frac{2x^2}{x^2-4}=0 \ \rightarrow \ 2x^2=0 \rightarrow x=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}\,(0,\,0)$

  Con el eje $Y \ \rightarrow \ x=0 \ \rightarrow \ y=0 \ \rightarrow \ \text{Punto}\,(0,\,0)$

- Asíntotas verticales: $x=-2,\ x=2$

  $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota horizontal: $y=2$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=2, \ \text{con} \ y>2$

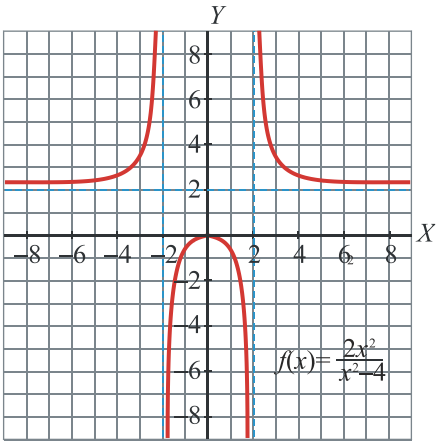
  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2, \ \text{con} \ y>2$

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{4x\left(x^2-4\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{4x^3-16x-4x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; -16x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(0,\,0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Estudia y representa la siguiente función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {−1, 1}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3}{x^2-1}=0 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(0,\,0)$

  Con el eje $Y \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; y=0 \;\rightarrow\; \text{Punto}\,(0,\,0)$

- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota oblicua:

  $\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{x}{x^2-1} \;\Rightarrow\; y=x$ es asíntota oblicua.

  Si $x\to+\infty,\ \frac{x}{x^2-1}>0 \;\Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

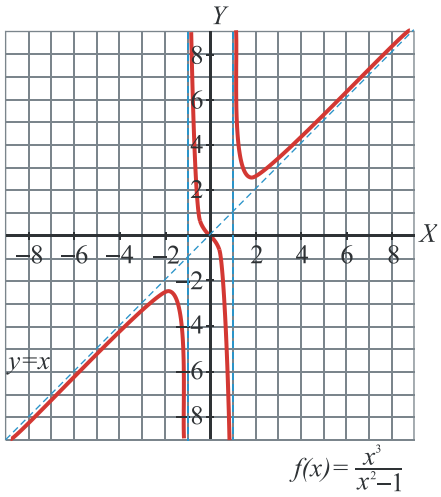
  Si $x\to-\infty,\ \frac{x}{x^2-1}<0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0\begin{cases}x=0 & \rightarrow \text{ Punto } (0,\,0)\\ x=-\sqrt{3} & \rightarrow \text{ Punto } \left(-\sqrt{3},\,\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)\\ x=\sqrt{3} & \rightarrow \text{ Punto } \left(\sqrt{3},\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\end{cases}$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Representa la siguiente función, estudiando los aspectos que consideres más relevantes:

$$\boldsymbol{f(x)=x^3-12x}$$

Solución:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-12x\right)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-12x\right)=-\infty$
- Puntos de corte con los ejes:

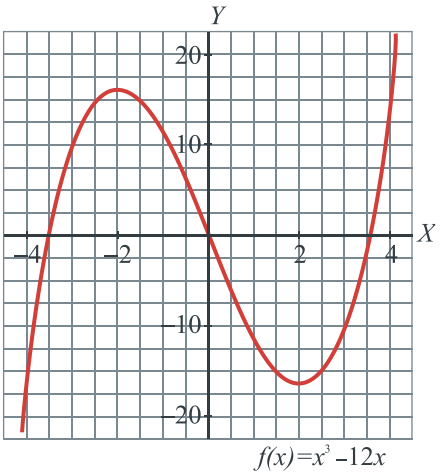
  Con el eje $X \rightarrow x^3-12x=x\left(x^2-12\right)=0\begin{cases}x=-\sqrt{12}\rightarrow \text{ Punto } \left(-\sqrt{12},\,0\right)\\ x=0\rightarrow \text{ Punto } (0,\,0)\\ x=\sqrt{12}\rightarrow \text{ Punto } \left(\sqrt{12},\,0\right)\end{cases}$

  Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

- Puntos singulares:

  $f'(x)=3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases}x=-2 & \rightarrow \text{ Punto } (-2,\,16)\\ x=2 & \rightarrow \text{ Punto } (2,\,-16)\end{cases}$

- Gráfica:



Ejercicio nº 19.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {2}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{x-2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

- Asíntota vertical: $x=2$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty; \qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

  Asíntota oblicua:

  $\frac{x^2}{x-2}=x+2+\frac{4}{x-2} \quad \Rightarrow \quad y=x+2$ es asíntota oblicua.

  Si $x\to+\infty,\ \frac{4}{x-2}>0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

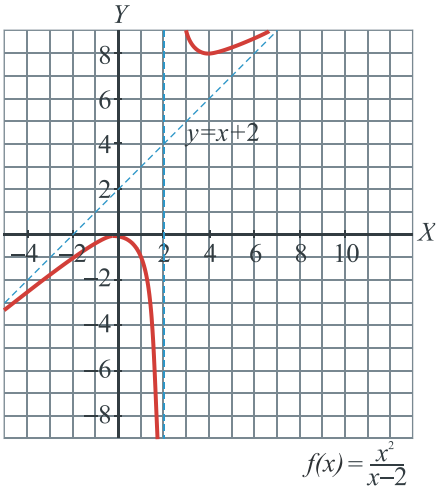
  Si $x\to-\infty,\ \frac{4}{x-2}<0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x(x-4)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \text{ Punto } (0,\,0) \\ x=4 \rightarrow \text{ Punto } (4,\,8) \end{cases}$$

- Gráfica:



Ejercicio nº 20.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x}$$

Solución:

- Dominio = $\mathbf{R} - \{0\}$
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^4-1}{x}=0 \rightarrow x^4-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1$

  $\rightarrow$ Puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$

  Con el eje $Y \rightarrow$ No corta al eje Y, pues $x=0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x=0$

  $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\leftarrow 0^+} f(x)=-\infty$

  Rama parabólica (pues el grado del numerador es tres unidades mayor que el del denominador).

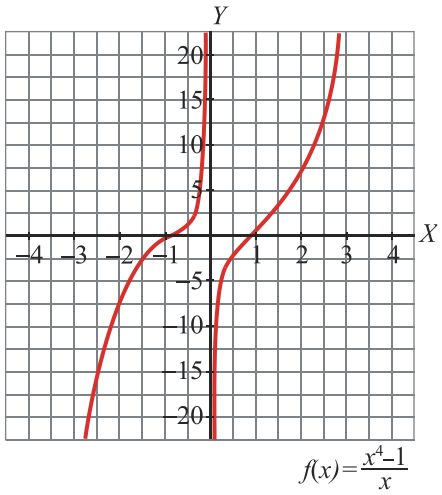
  $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{4x^3x-\left(x^4-1\right)}{x^2}=\frac{4x^4-x^4+1}{x^2}=\frac{3x^4+1}{x^2}\neq 0$$

  No tiene puntos singulares.

- Gráfica:



Ejercicio nº 21.-

Estudia y representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$$

Solución:

- Dominio = **R** − {–1, 1}
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow y=0 \rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-1}=0 \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow$

  $\rightarrow$ Puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

  Con el eje $Y \rightarrow x=0 \rightarrow y=4 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

- Asíntotas verticales: $x=-1,\ x=1$

  $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

  Asíntota horizontal: $y=1$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=10,$ con $y<1$

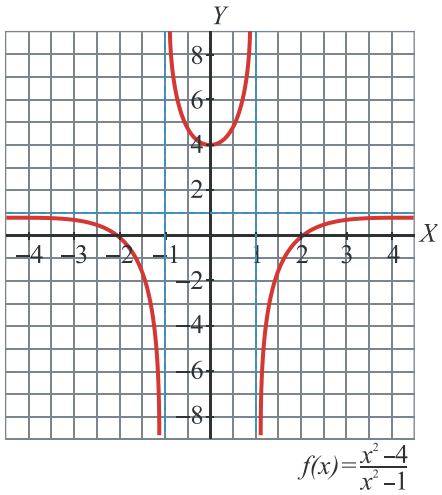
  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1,$ con $y<1$

- Puntos singulares:

  $$f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

  $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0 \rightarrow$ Punto $(0, 4)$

- Gráfica:



Ejercicio nº 22.-

Representa gráficamente la siguiente función, estudiando previamente los aspectos que consideres más relevantes:

$$f(x)=\frac{2x^3}{x^2+2}$$

Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{2x^3}{x^2+2}=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

  Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

- Asíntotas verticales: No tiene.

  Asíntota oblicua:

  $\frac{2x^3}{x^2+2}=2x+\frac{-4x}{x^2+2} \quad \Rightarrow \quad y=2x$ es asíntota oblicua.

  Si $x \rightarrow +\infty, \quad \frac{-4x}{x^2+2}<0 \quad \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

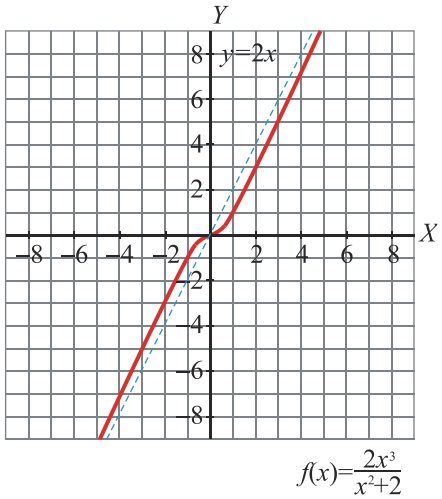
  Si $x \rightarrow -\infty, \quad \frac{-4x}{x^2+2}>0 \quad \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

- Puntos singulares:

$$f'(x)=\frac{6x^2(x^2+2)-2x^3\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{6x^4+12x^2-4x^4}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^4+12x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^2(x^2+6)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2(x^2+6)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto } (0,\,0)$$

- Gráfica:



<u>Ejercicio nº23.-</u>

Estudia y representa la función:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$$

Solución:

- Dominio = **R**
- Puntos de corte con los ejes:

  Con el eje $X \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad x^4=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$
  Con el eje $Y \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad$ Punto $(0,\,0)$

- Asíntotas verticales: No tiene.
  Rama parabólica (pues el grado del numerador es dos unidades mayor que el del denominador).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

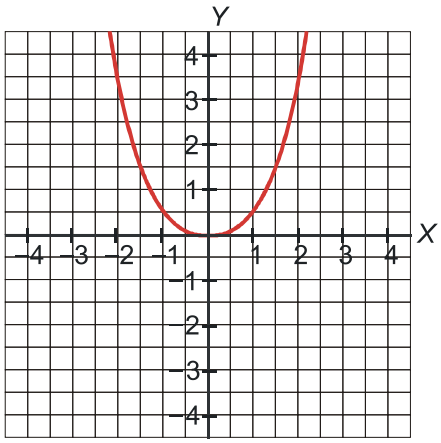
- Puntos singulares:

$$f(x)=\frac{4x^3\left(x^2+1\right)-x^4\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x^5+4x^3-2x^5}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^5+4x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^3\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3\left(x^2+2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad \text{Punto}\,(0,\,0)$$

- Gráfica

FUNCIONES



$$f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$$