

Kalkulus dengan EMT

Nama : Daniel Alfonsos
NIM : 22301241024
Kelas : Pendidikan Matematika A 2022

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:

- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).
- Fungsi Multivariabel

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:

- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).

Berikut adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

$$2x^2 + e^{\sin x}$$

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik  
>f(0), f(1), f(pi)
```

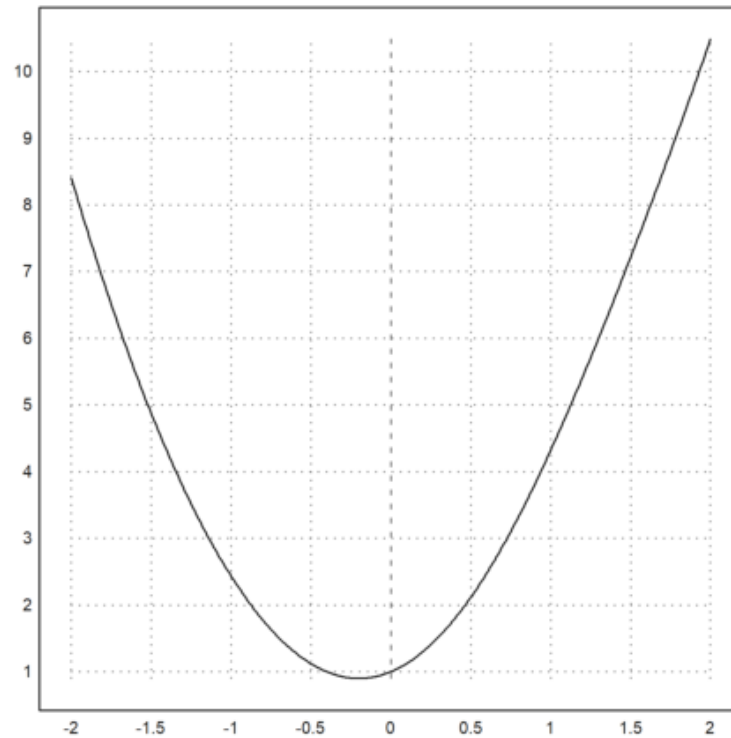
```
1  
4.31977682472  
20.7392088022
```

```
>f(a) // error, tidak dapat dihitung nilainya
```

```
Variable or function a not found.  
Error in:  
f(a) // tidak dapat dihitung nilainya ...  
^
```

Silahkan Anda plot kurva fungsi di atas!

```
>plot2d("2*x^2+exp(sin(x))"):
```



Berikutnya kita definisikan fungsi:

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}.$$

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

0

```
>g(0)
```

0

dapat dilihat bahwa $x=0$ dan $x=3$ membuat nilai $g(x)=0$, artinya $x=0$ dan $x=3$ adalah akar-akar dari persamaan pada pembilang di fungsi $g(x)$. Hal dapat pula dicek menggunakan EMT seperti dijelaskan saat awal dulu, yaitu

```
>&load(fourier_elim)
```

```
C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/fo\
urier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$fourier_elim([x^2-3*x>=0], [x])
```

$$[x = 0] \vee [x = 3] \vee [3 < x] \vee [x < 0]$$

```
>g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik
```

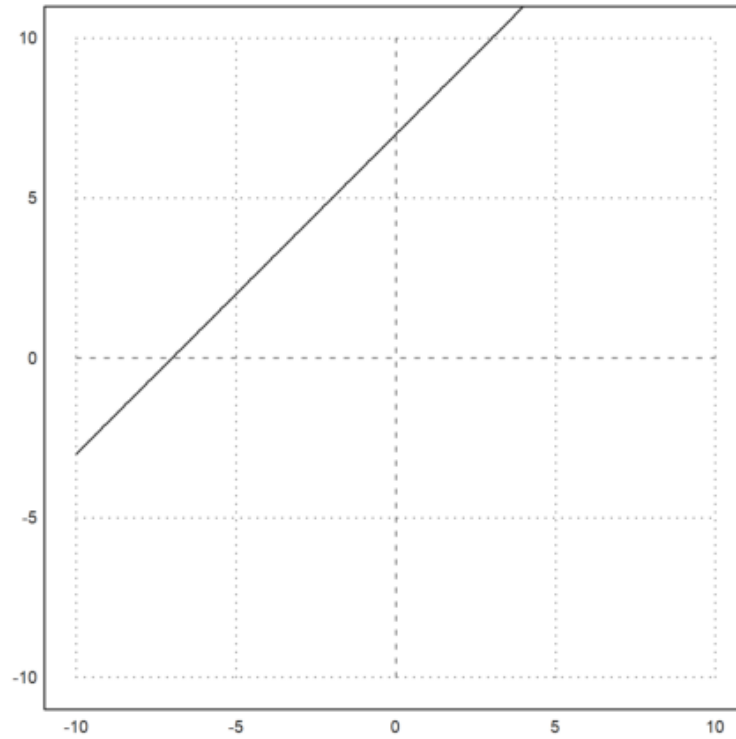
```
Floating point error!  
Error in sqrt  
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.  
g:  
  useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)  
Error in:  
g(1) // kompleks, tidak dapat dihitung oleh fungsi numerik ...  
^
```

Nb: Floating point error karena untuk $x=1$, $g(x)=g(1)$ akan bernilai imajiner, yaitu

$$\frac{\sqrt{-2}}{2}$$

Silahkan Anda plot kurva fungsi di atas!

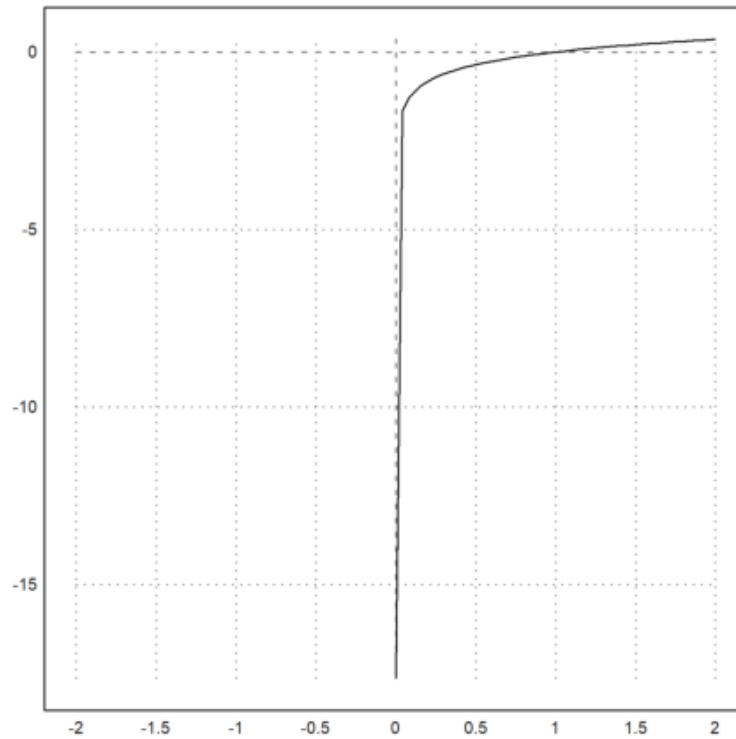
```
>plot2d("g(x)",-10,10,-10,10):
```



```
>function k(x) := logbase(x, 7) // fungsi logaritma dengan basis 10 dan numerus x  
>k(49)
```

2

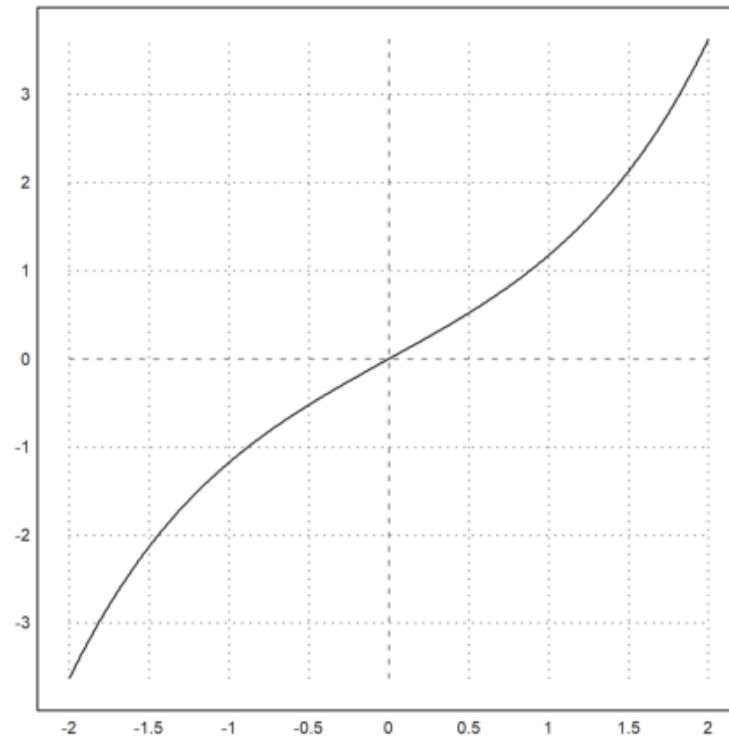
```
>plot2d("k(x)"): 
```



```
>function p(x) := sinh(x) // fungsi hiperbolik  
>p(1)
```

1.17520119364

```
>plot2d("p(x)":
```



Komposisi fungsi adalah susunan beberapa fungsi yang berkaitan dan terhubung. Bahasa paling mudah untuk mendeskripsikan komposisi fungsi ini adalah "fungsi di dalam fungsi". Sebagai contoh, jika

$$f(x) = x^3 + 1$$

dan

$$g(x) = x^2 + x$$

maka

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\boxed{x^2 + x})^3 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\boxed{x^3 + 1})^2 + \boxed{x^3 + 1}$$

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>function h(x) := f(g(x)) // definisi komposisi fungsi  
>h(5) // sama dengan f(g(5))
```

2.20920171961

```
>function u(x) := g(f(x))
```

Silakan Anda plot kurva fungsi komposisi fungsi f dan g:

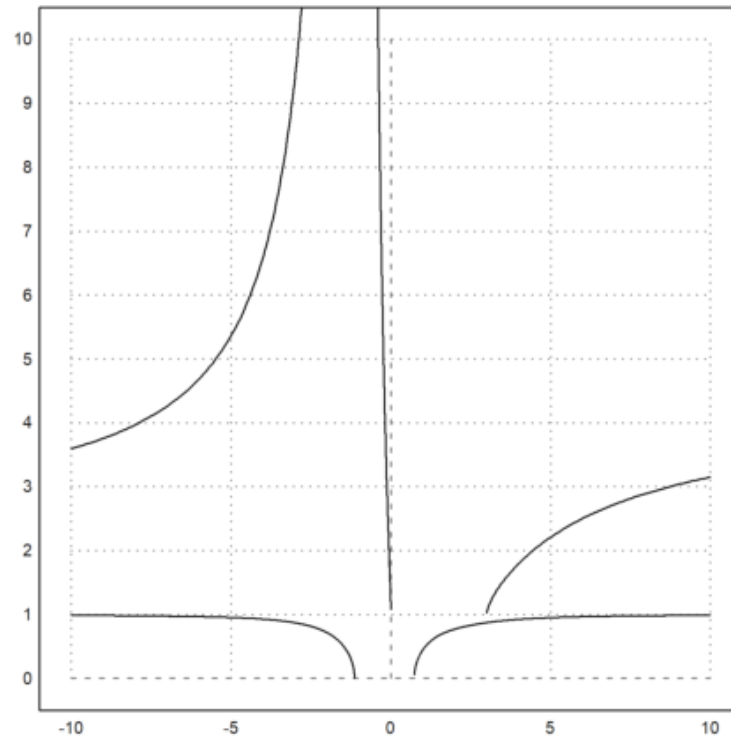
$$h(x) = f(g(x))$$

dan

$$u(x) = g(f(x))$$

bersama-sama kurva fungsi f dan g dalam satu bidang koordinat.

```
>plot2d(["h(x)", "u(x)"], -10,10,0,10):
```



```
>f(0:10) // nilai-nilai f(0), f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1, 4.31978, 10.4826, 19.1516, 32.4692, 50.3833, 72.7562,  
99.929, 130.69, 163.51, 200.58]
```

```
>gmap(200:210)
```

```
[0.987534, 0.987596, 0.987657, 0.987718, 0.987778, 0.987837,  
0.987896, 0.987954, 0.988012, 0.988069, 0.988126]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format `:=`, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3  
    else return x^2  
    endif;  
endfunction
```

```
>f(1)
```

1

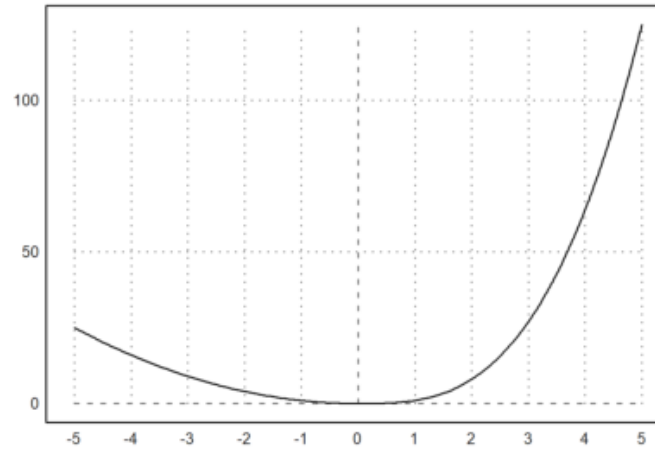
```
>f(-2)
```

4

```
>f(-5:5)
```

[25, 16, 9, 4, 1, 0, 1, 8, 27, 64, 125]

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```



```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

$$2 e^x$$

```
>$f(a) // nilai fungsi secara simbolik
```

$$2 e^a$$

```
>f(E) // nilai fungsi berupa bilangan desimal
```

30.308524483

```
>$f(E), $float(%)
```

30.30852448295852

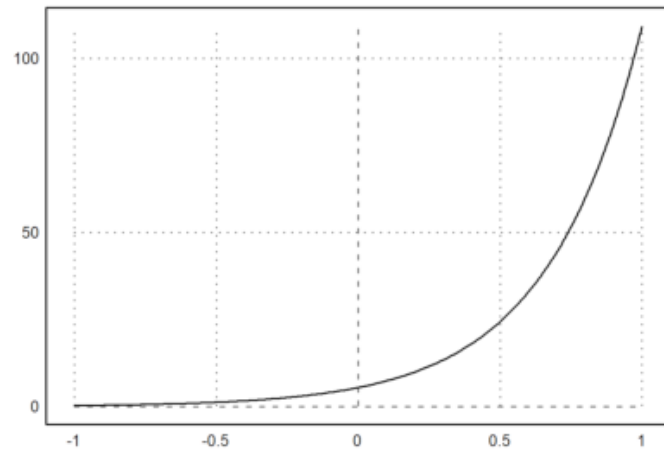
```
>function g(x) &= 3*x+1
```

$3x + 1$

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

$3x + 1$
2 E

```
>plot2d("h(x)",-1,1):
```



Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

1. Diberikan sebuah fungsi

$$a(x) = x^2 + x + 11$$

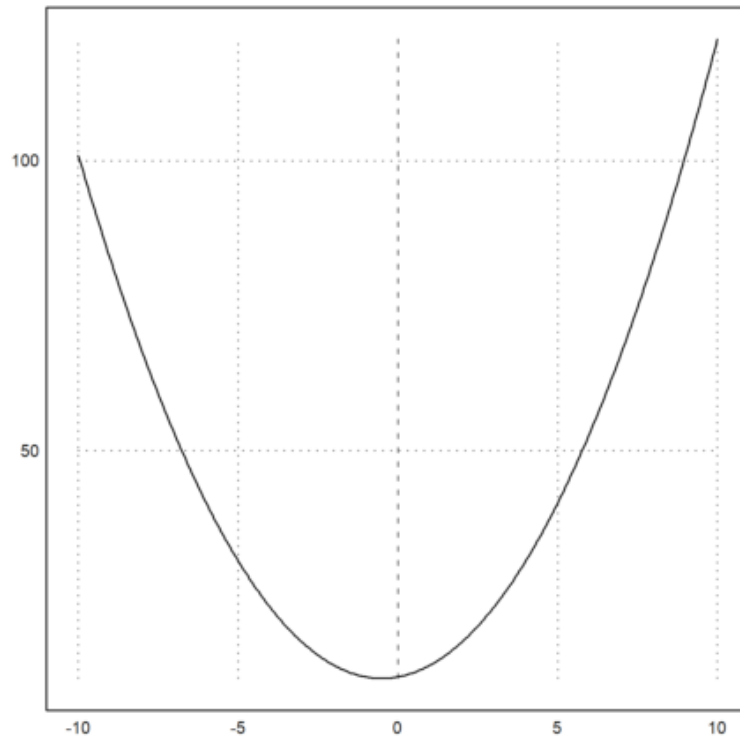
tentukan nilai

- a. $a(-2)$
- b. $a(-12)$

```
>function a(x) := x^2+x+11  
>a(-2), a(-12)
```

```
13  
143
```

```
>plot2d("a",-10,10):
```



2. Diberikan sebuah fungsi

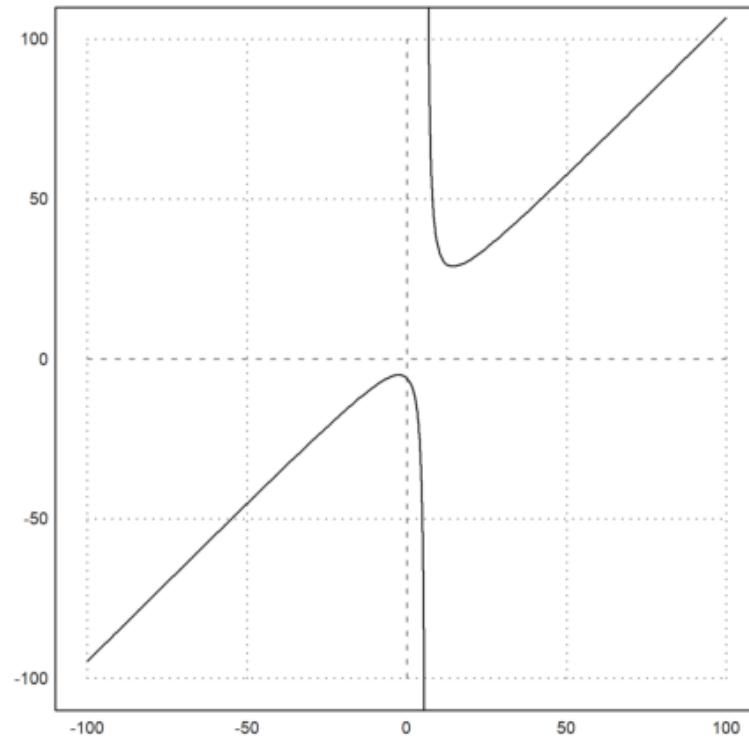
$$b(x) = \frac{x^2 + 36}{x + 6}$$

hitunglah masing-masing nilai $b(4)$ dan $b(44)$

```
>function b(x) := (x^2+36)/(x-6)  
>b(4), b(44)
```

```
-26  
51.8947368421
```

```
>plot2d("b",-100,100,-100,100):
```



3. Diberikan sebuah fungsi

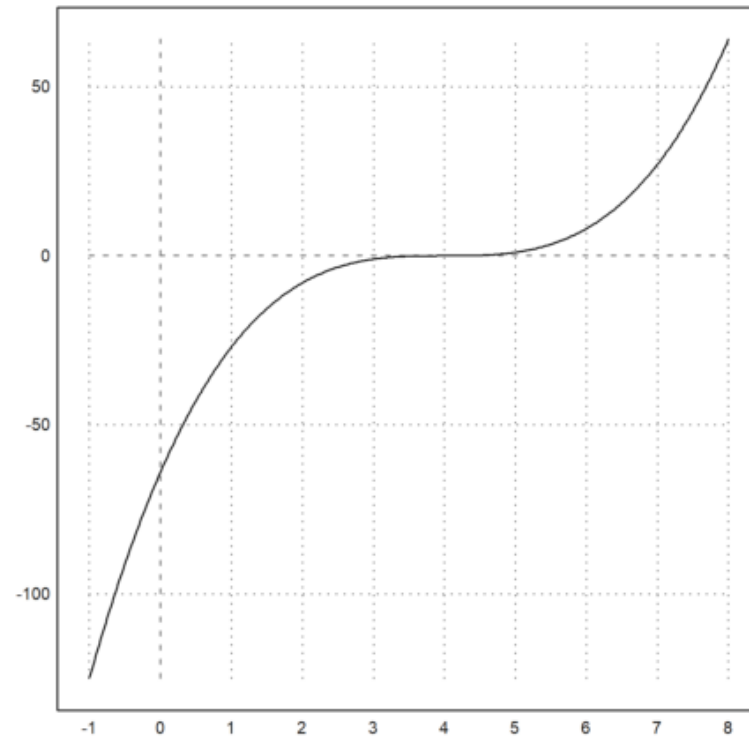
$$p(x) = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$$

tentukan nilai $p(4)$, $p(-4)$, $p(10)$

```
>function p(x) := x^3-12*x^2+48*x-64  
>p(4), p(-4), p(10)
```

```
0  
-512  
216
```

```
>plot2d("p",-1,8):
```

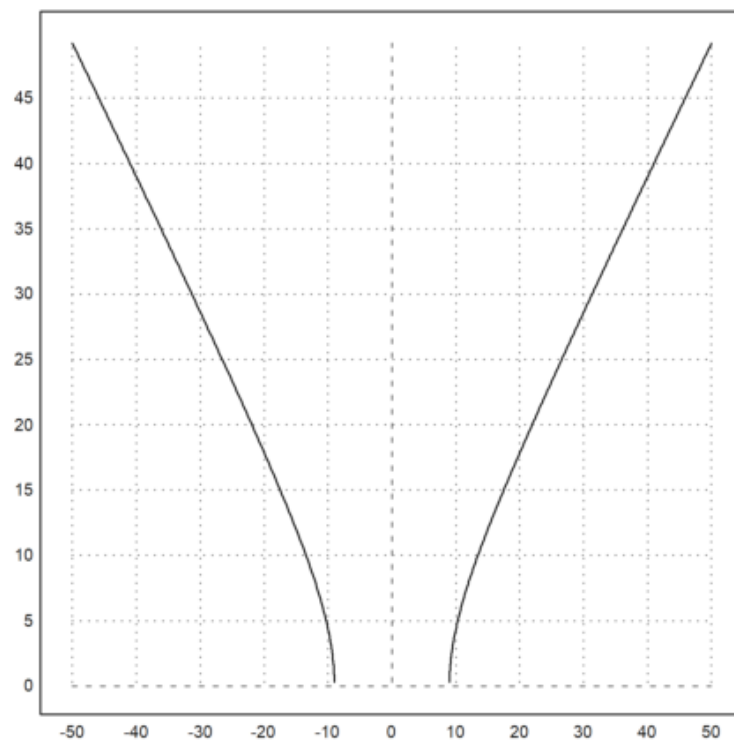


4. Tentukan nilai $f(41)$ dari fungsi berikut

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 81}$$

```
>function f(x) := sqrt(x^2-81)
>f(41)
```

```
>plot2d("f",-50,50):
```



5. Untuk fungsi

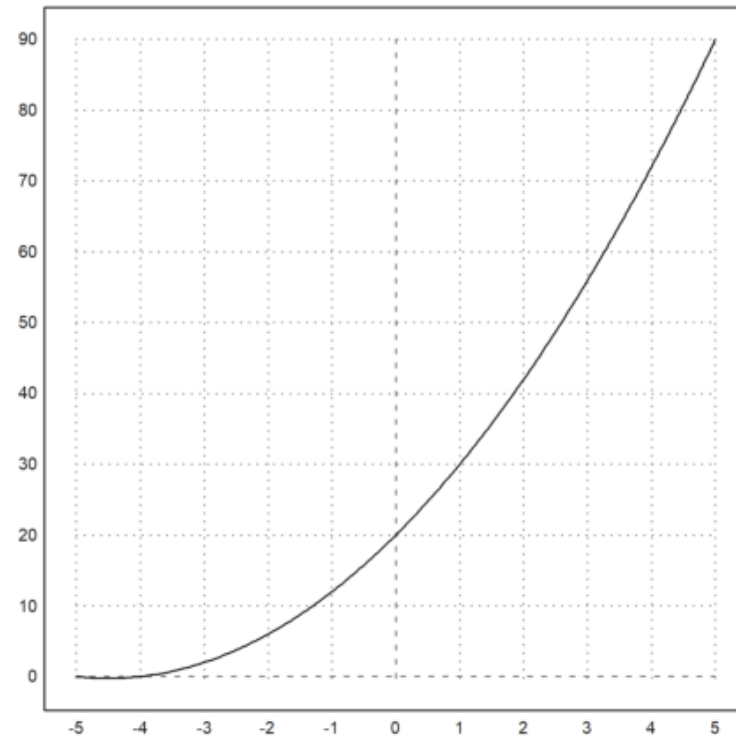
$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \text{ dan } g(x) = x + 7$$

tentukan nilai $(f \circ g)(0)$ dan $(g \circ f)(10)$

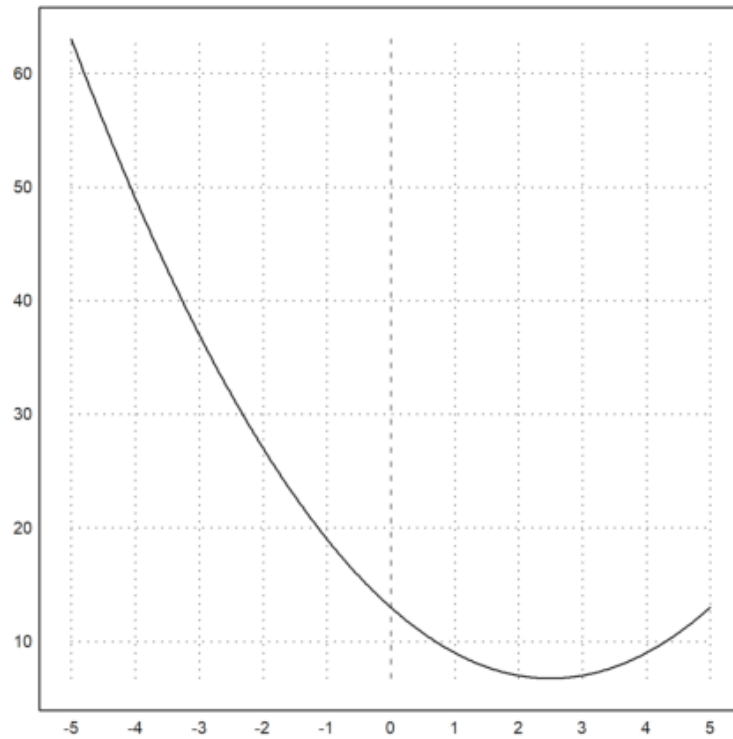
```
>function f(x) := x^2-5*x+6; $f(x)
>function g(x) := x+7; $g(x)
>f(g(-2)), g(f(0))
```

6
13

```
>plot2d("f(g(x))",-5,5):
```



```
>plot2d("g(f(x))",-5,5):
```



6. Diberikan sebuah fungsi

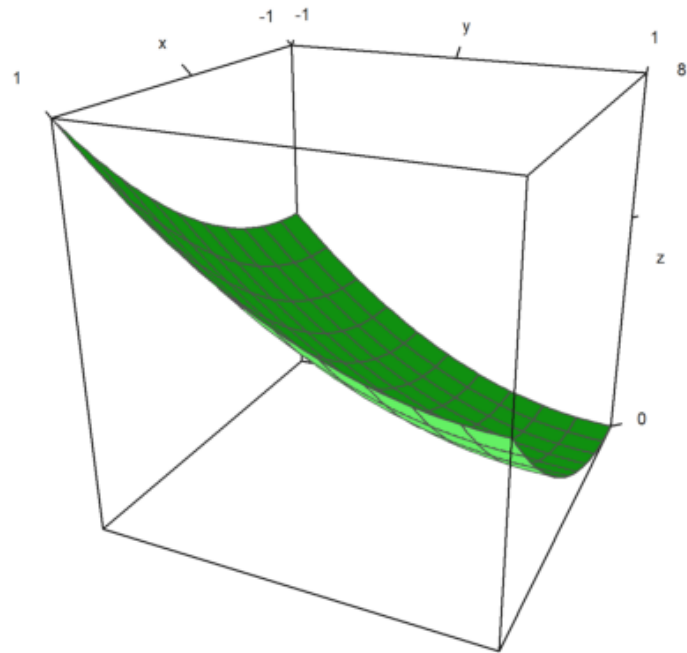
$$f(x, y) := x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$$

tentukan nilai $f(-1,1)$

```
>function f(x,y):= x^2+y^2+2*x-2*y+2  
>f(-1,1)
```

0

```
>plot3d("f"):
```



Nama : Syifa Safira
NIM : 22301241049
Kelas: Pendidikan Matematika A 2022

Kalkulus * Menghitung Limit

Definisi limit

Pada dasarnya, limit digunakan untuk menyatakan sesuatu yang nilainya mendekati nilai tertentu. Limit dapat diartikan sebagai menuju suatu batas, sesuatu yang dekat namun tidak dapat dicapai. Mengapa nilainya hanya mendekati? Karena suatu fungsi biasanya tidak terdefinisi pada titik-titik tertentu. Walaupun suatu fungsi seringkali tidak terdefinisi untuk titik tertentu, namun masih dapat dicari tahu berapa nilai yang didekati oleh fungsi tersebut apabila titik tertentu semakin didekati yaitu dengan limit.

Bentuk umum dari limit sendiri dinotasikan dengan:

$$\lim_{x \rightarrow c} F(x) = L$$

Notasi tersebut menyatakan bahwa $f(x)$ untuk nilai x mendekati c sama dengan L . $F(x)$ disini dapat berupa bermacam-macam jenis fungsi. Dan L dapat berupa konstanta, ataupun "und" (tak terdefinisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Begitupun dengan batas c , dapat berupa sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf).

Sebuah fungsi dapat dikatakan memiliki limit apabila limit kanan dan limit kiri nya memiliki nilai yang sama. Dimana, limit dari fungsi tersebut adalah nilai dari limit kanan dan limit kiri fungsi yang bernilai sama tadi.

Limit pada EMT

Pada EMT cara mendefinisikan limit yaitu dengan format :

```
$showev('limit(f(x),x,c))
```

Format tersebut akan menampilkan limit yang dimaksud dan hasilnya. Jika kita ingin menampilkan hasilnya saja dari sebuah limit tanpa menampilkan limitnya, kita bisa menggunakan format :

```
'limit(f(x),x,c)
```

Sedangkan, untuk limit kanan dan limit kiri seperti pada definisi dapat ditampilkan di EMT dengan cara menambah opsi "plus" atau "minus" :

```
$showev('limit(f(x),x,c, plus)) atau 'limit(f(x),x,c, minus)
```

Perhatikan contoh-contoh berikut

Contoh limit

Contoh Limit Aljabar

Soal 1

Tunjukkan bahwa limit kiri dan kanan dari bentuk limit berikut bernilai sama.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1}$$

```
>$showev('limit(1/(x-1),x,0, plus))
```

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

```
>$showev('limit(1/(x-1),x,0, minus))
```

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

```
>$showev('limit(1/(x-1),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

Dapat terlihat bahwa nilai limit kiri = nilai limit kanan. Maka fungsi tersebut memiliki nilai limit, yaitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

Soal 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1}$$

```
>$showev('limit(sqrt(x^2-3*x)/(x+1),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{x + 1} = 1$$

Soal 3

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$$

```
>$showev('limit((2*x^2-3*x-2)/(x-2),x,3))
```

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 7$$

Soal 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-2)^x$$

```
>$showev('limit((2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$$

Soal 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{9x^2 - 2x + 5} + 3x - 2$$

```
>$showev('limit((3*x-2)-sqrt(9*x^2-2*x+5),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{9x^2 - 2x + 5} + 3x - 2 = -\frac{5}{3}$$

Soal 6

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^3 - 48x}{x^2 - 16}$$

```
>$showev('limit((3*x^3-48*x)/(x^2-16),x,4))
```

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^3 - 48x}{x^2 - 16} = 12$$

Soal 7

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|}$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + x^2}{x^2 - |x|} = -1$$

Contoh Limit Trigonometri

Soal 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

```
>$showev('limit((sin(x)/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Soal 2

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cot(7h)}{\cot(5h)}$$

```
>$showev ('limit(cot(7*h)/cot(5*h),h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cot(7h)}{\cot(5h)} = \frac{5}{7}$$

Soal 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ind$$

Soal 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Contoh Limit Logaritma

Soal 1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x = \textit{infinity}$$

Soal 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(2x)$$

```
>$showev('limit(log(2*x), x, 0))
```

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(2x) = \textit{infinity}$$

Soal 3

$$\lim_{x \rightarrow 10} \log(10x)$$

```
>$showev('limit(log(10*x), x, 10))
```

$$\lim_{x \rightarrow 10} \log(10x) = \log 100$$

Soal 4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \log^2(2x)$$

```
>$showev('limit((log(2*x))^2,x,2))
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \log^2(2x) = \log^2 4$$

Visualisasi Limit

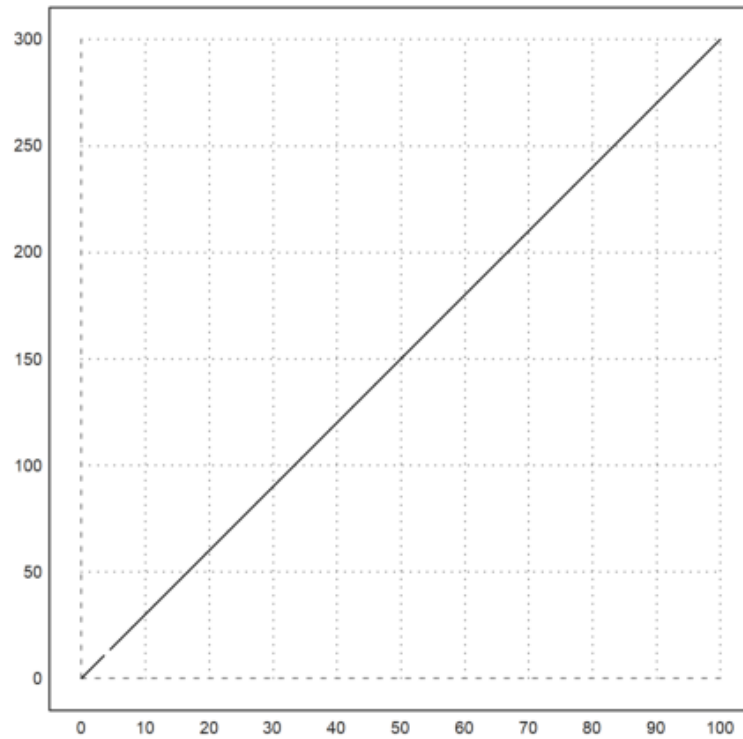
Limit dapat divisualisasikan menggunakan plot 2 dimensi. Pada EMT sendiri, format yang bisa digunakan untuk memvisualisasikan limit adalah :

`plot2d("f(x)",-c,c):`

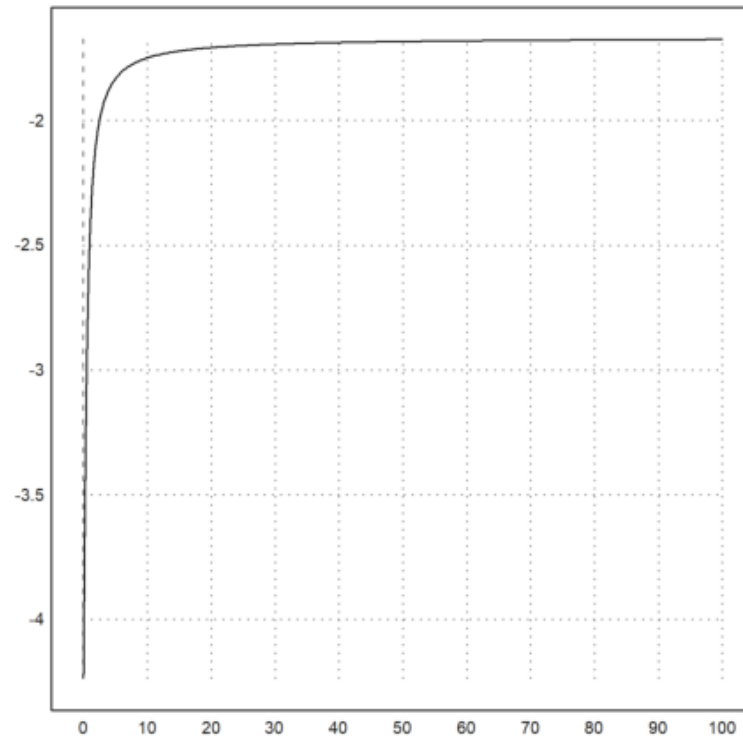
Dengan $f(x)$ adalah fungsi pada limit yang dicari, dan c berupa bilangan real menyesuaikan batas dari limit itu sendiri.

Perhatikan contoh-contoh berikut

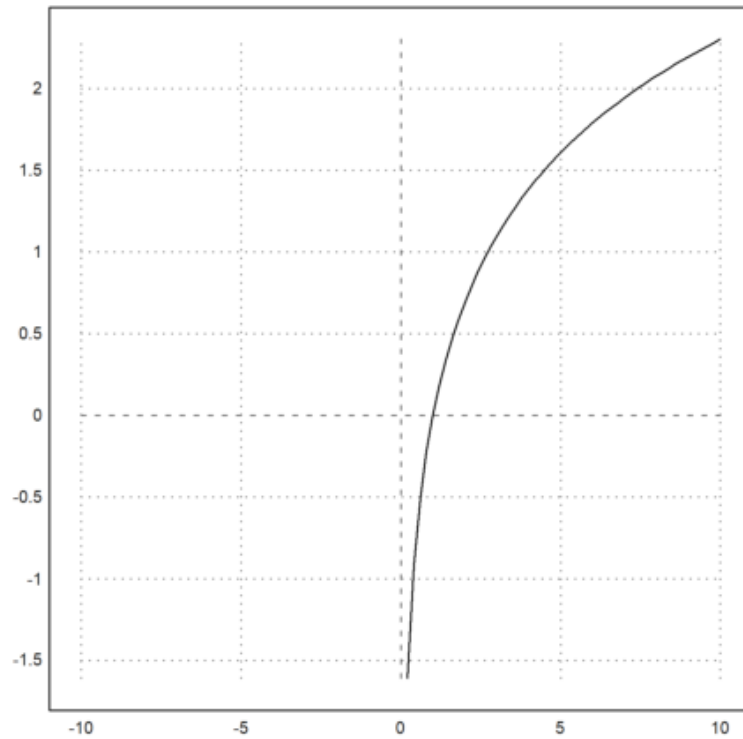
```
>plot2d("(3*x^3-48*x)/(x^2-16)",0,100):
```



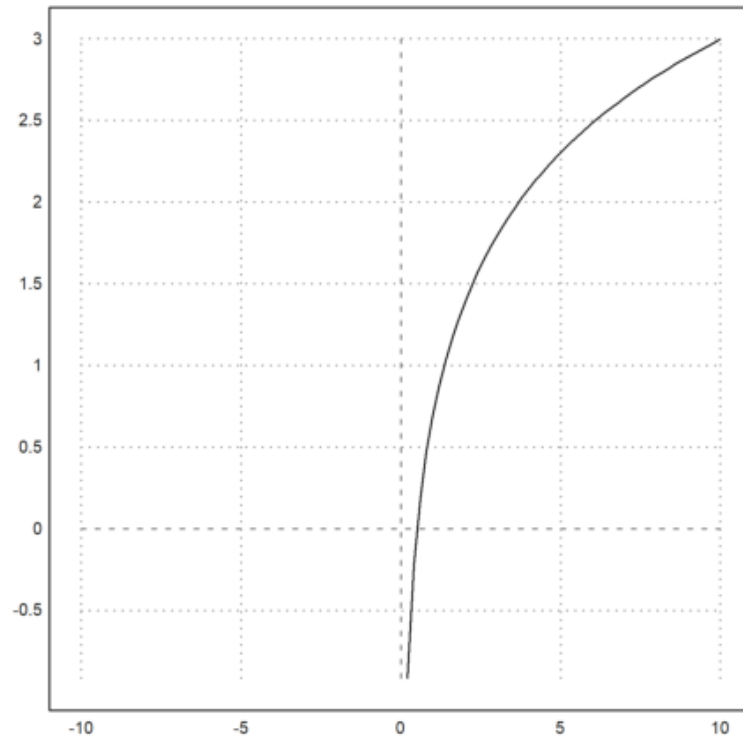
```
>plot2d("(3*x-2)-sqrt(9*x^2-2*x+5)",0,100):
```



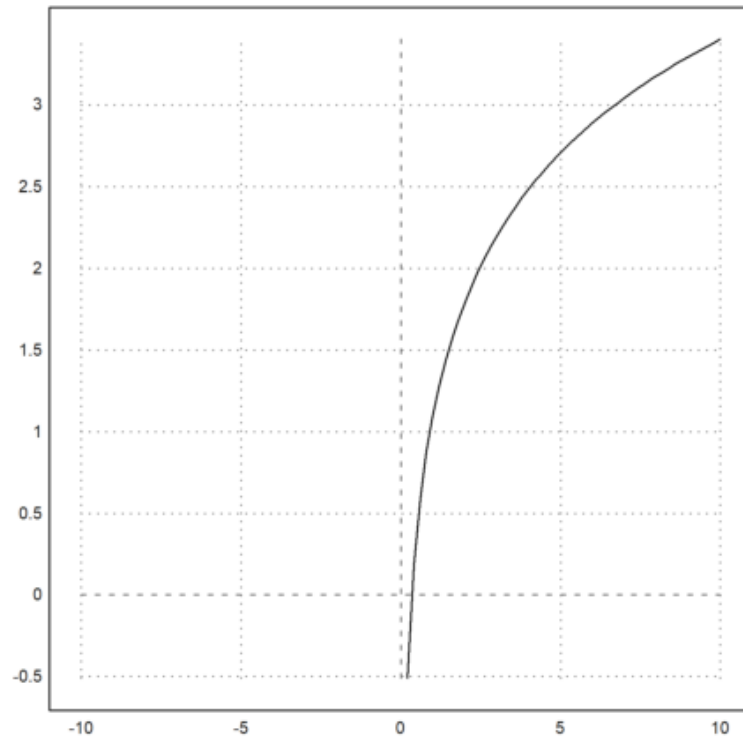
```
>plot2d("log(x)",-10,10):
```



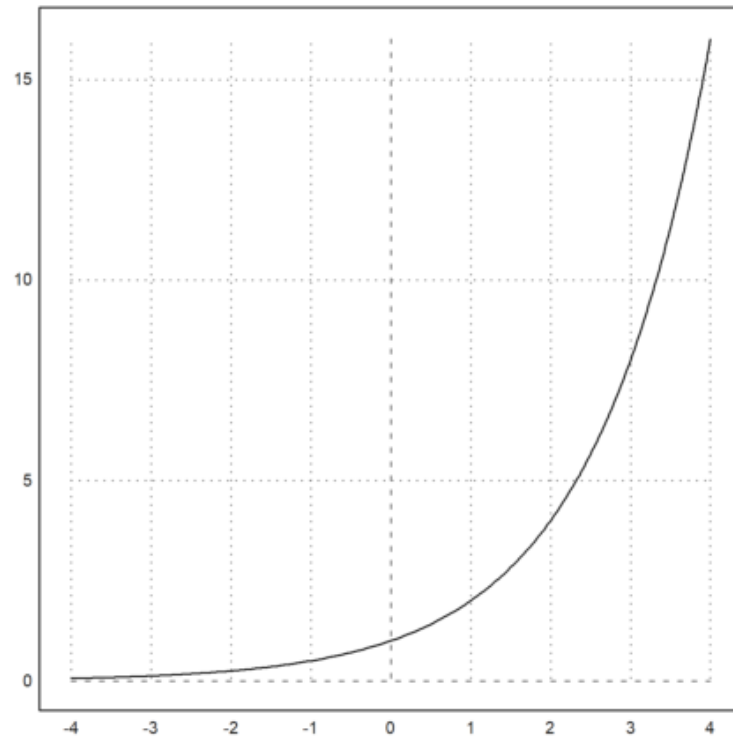
```
>plot2d("log(2*x)",-10,10):
```



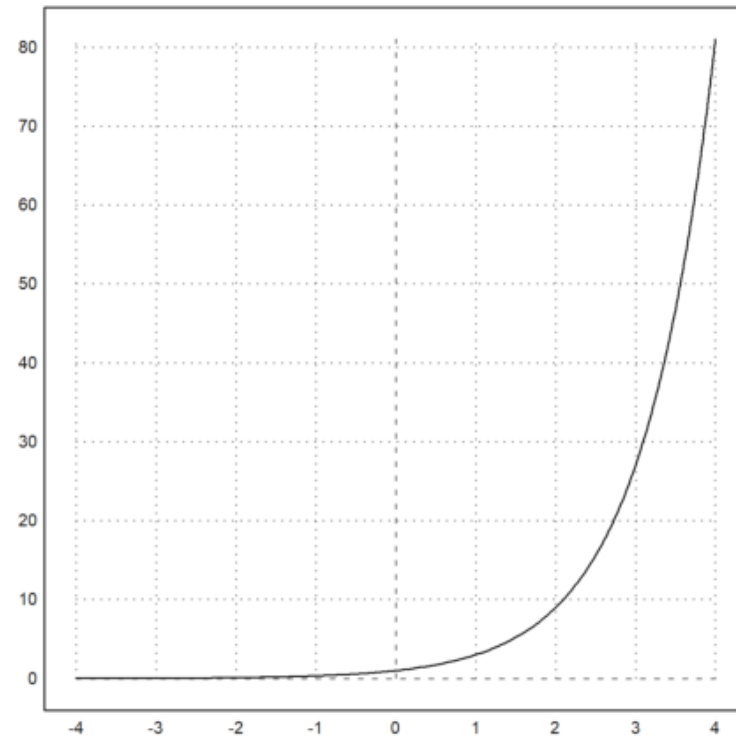
```
>plot2d("log(3*x)",-10,10):
```



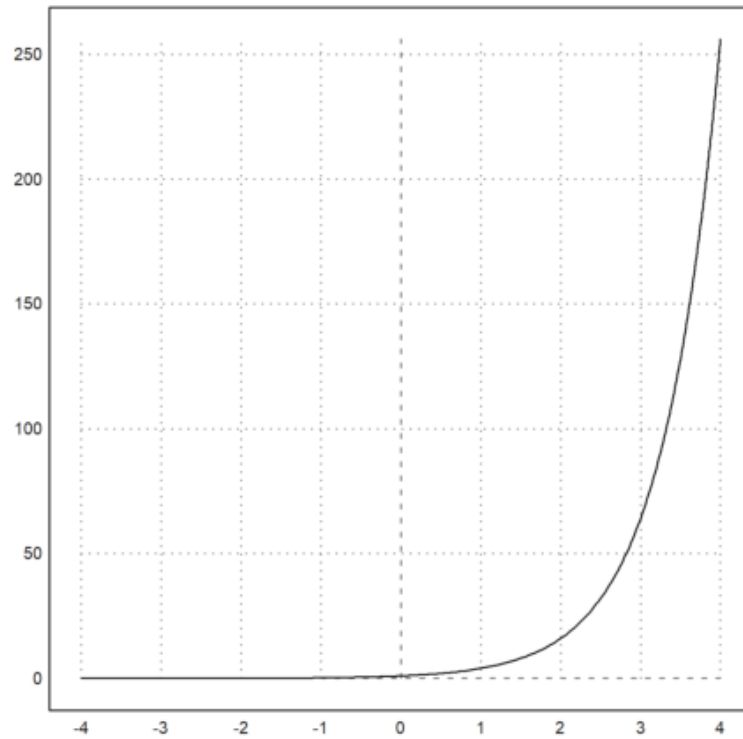
```
>plot2d("(2)^x",-4,4):
```



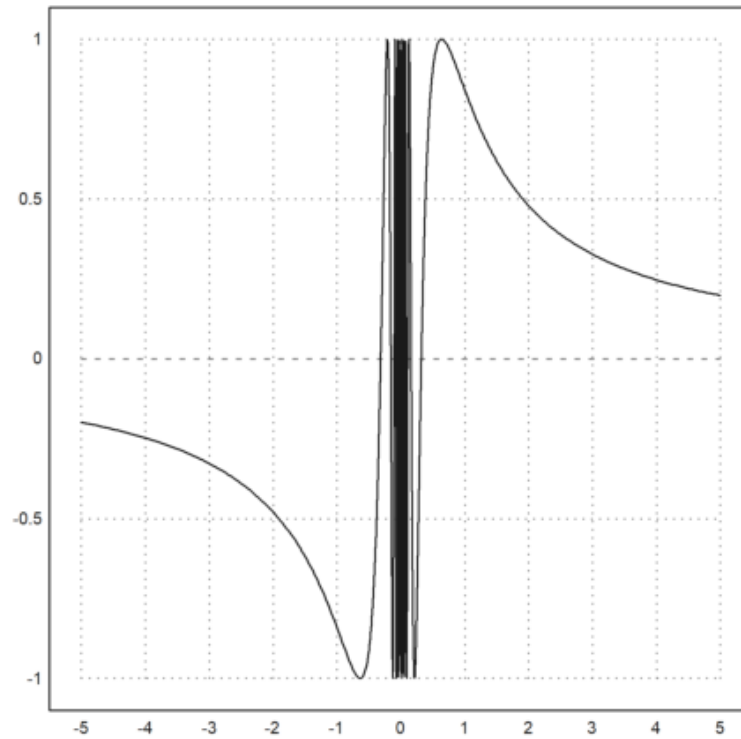
```
>plot2d("(3)^x",-4,4):
```



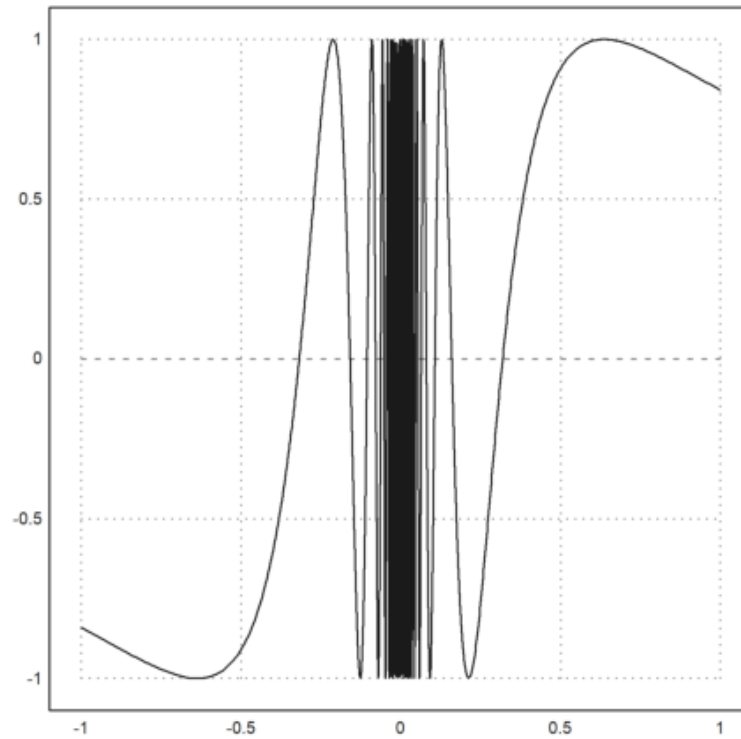
```
>plot2d("(4)^x",-4,4):
```



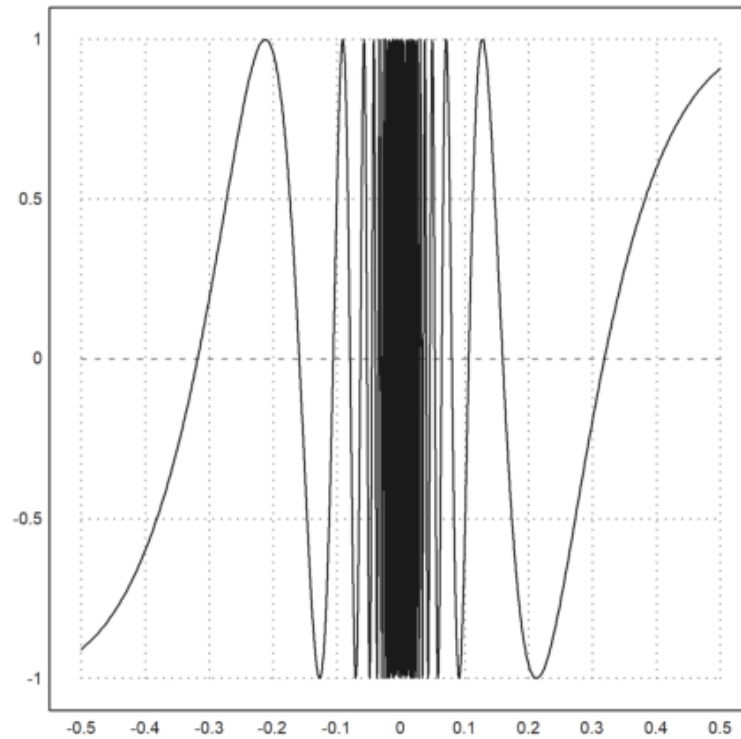
```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```



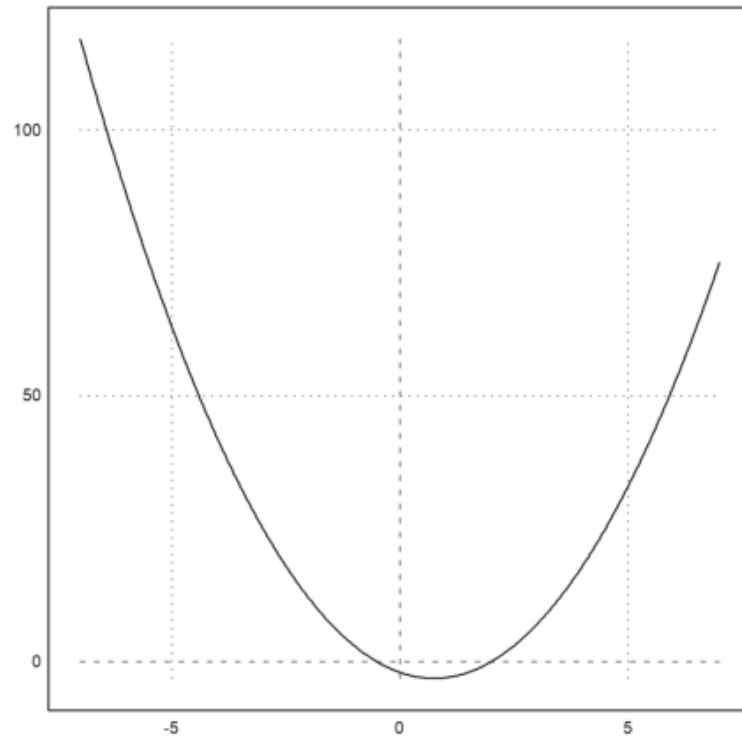
```
>plot2d("sin(1/x)",-1,1):
```



```
>plot2d("sin(1/x)",-0.5,0.5):
```



```
>plot2d("(2*x^2-3*x-2)",-7,7):
```



TURUNAN FUNGSI

Nama : Farkhan Burhan Al-Faruqi

NIM : 22301241031 Kelas: Pendidikan Matematika A

Definisi turunan:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.

Sebagai petunjuk, ekspansikan $(x+h)^n$ dengan menggunakan teorema binomial.

BUKTI

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Untuk

$$f(x) = x^n$$

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Dengan

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$$

maka

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \dots) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n.x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \dots}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n.x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}.x^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.x^{n-3}h^2 + \dots \\ &= n.x^{n-1} + 0 + 0 + \dots + 0 \\ &= n.x^{n-1} \end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(x^n) = n.x^{n-1}$$

Bukti turunan $\sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= \cos(x)$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(\sin(x)) = \cos(x)$$

Bukti turunan $\log(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dh}(\log(x+h) - \log x)}{\frac{d}{dh}(h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h}}{1} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x+h} \\
 &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti benar bahwa

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

sintaks

Turunan dari

$$f(x) = \sin x$$

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

```
>$showev('limit((sin(x)*cos(h)+cos(x)*sin(h)-sin(x))/h,h,0))// ekspansikan sin(x+h) dengan menggunak
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h \sin x - \sin x + \sin h \cos x}{h} = \cos x$$

```
>$showev('limit((sin(x)*(cos(h)-1)+cos(x)*sin(h))/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1) \sin x + \sin h \cos x}{h} = \cos x$$

```
>$showev('limit((sin(x)*(cos(h)-1))/h,h,0))+('limit((cos(x)*sin(h))/h,h,0))
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) \sin x + \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \cos x = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \right) \cos x$$

```
>$showev('limit((cos(x)*(sin(h)))/h,h,0))
```

$$\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}\right) \cos x = \cos x$$

sintaks
turunan dari

$$\log(x)$$

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((log((x+h)/(x)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit((log((1+h/x)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{h}{x} + 1\right)}{h} = \frac{1}{x}$$

```
>$showev('limit(((h/x))/h,h,0))//menggunakan identitas logaritma, sisanya adalah hasil turunan
```

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Visualisasi dan Kurva Fungsi

grafik fungsi dan turunanya

$$f(x) = \sin(x)$$

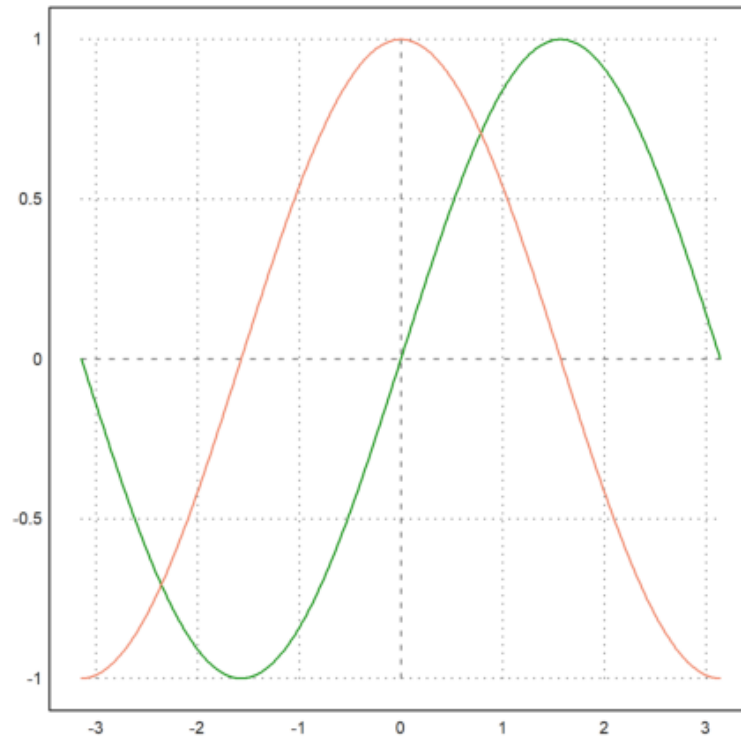
```
>function f(x) &= sin(x) // definisikan f(x)=sin(x)
```

$$\sin(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\cos x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,orange]):
```



grafik fungsi dan grafik turunanya

$$f(x) = \cos(x)$$

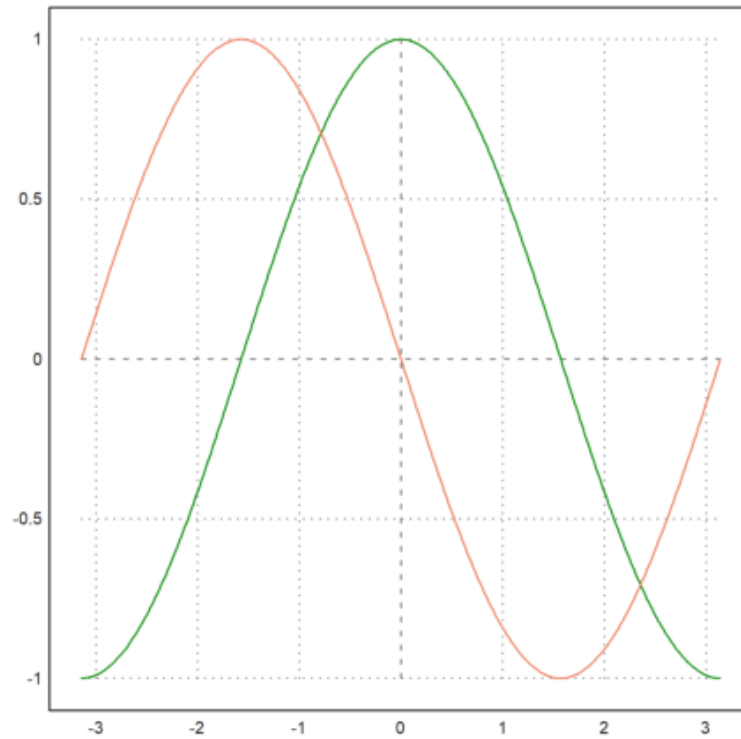
```
>function f(x) &= cos(x) // definisikan f(x)=cos(x)
```

$$\cos(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$-\sin x$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[green, orange]):
```



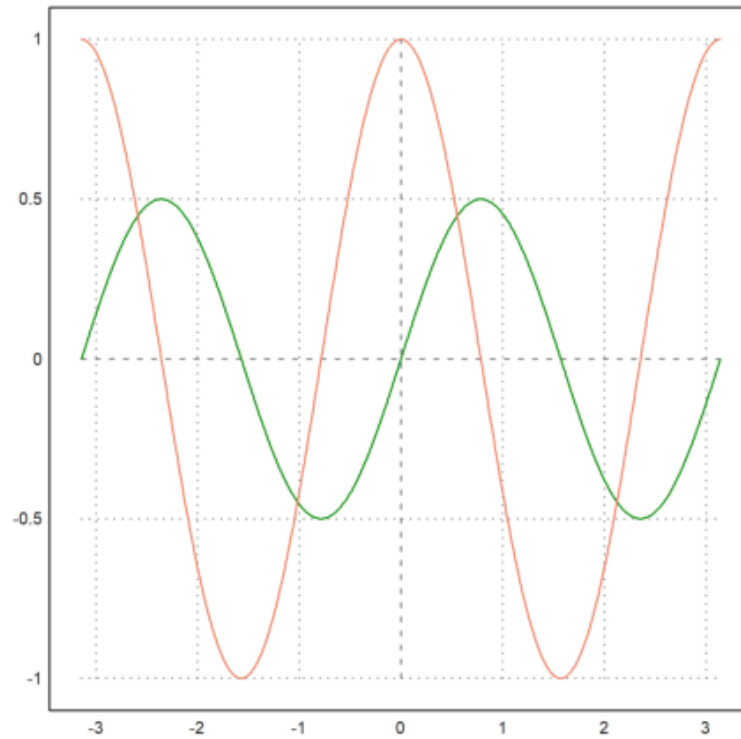
```
>function f(x) &= sin(x)*cos(x) // definisikan f(x)=cos(x)
```

$\cos(x)$ $\sin(x)$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[green,orange]):
```



grafik fungsi dan grafik turunanya

$$f(x) = x^4$$

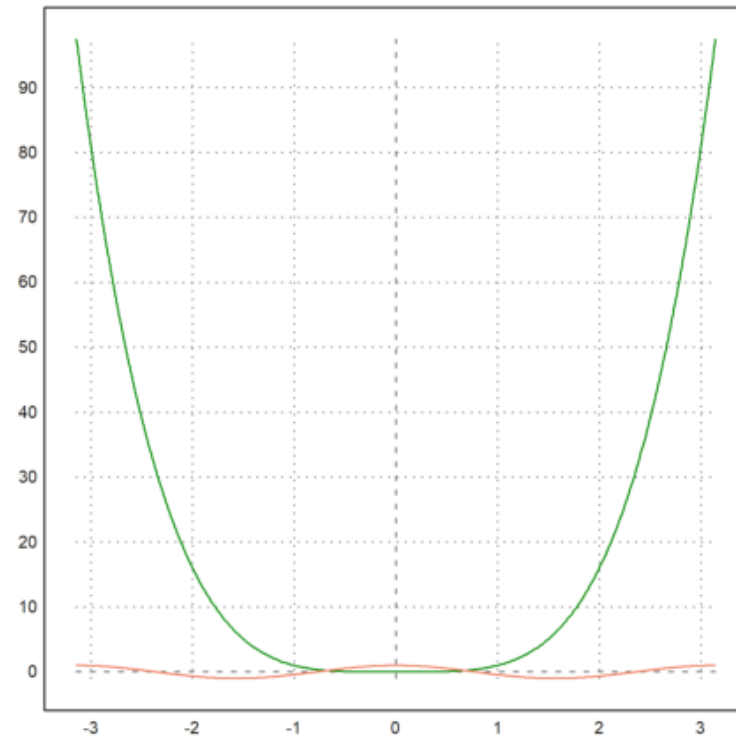
```
>function f(x) := x^4 // definisikan f(x)=x^4  
>$f(x)
```

$$\cos x \sin x$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[green, orange]):
```



grafik fungsi dan grafik turunanya

$$f(x) = 2x^2$$

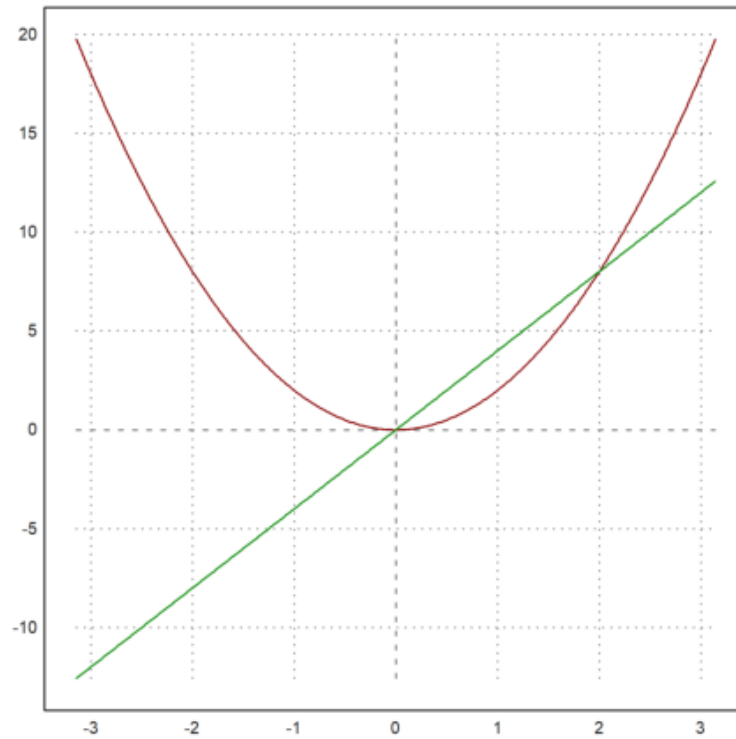
```
>function f(x) &= 2*x^2 // definisikan f(x)=2*x^2
```

$$\frac{2}{2x}$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$4x$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[red,green]):
```



grafik fungsi dan grafik turunanya

$$f(x) = 2x + 5$$

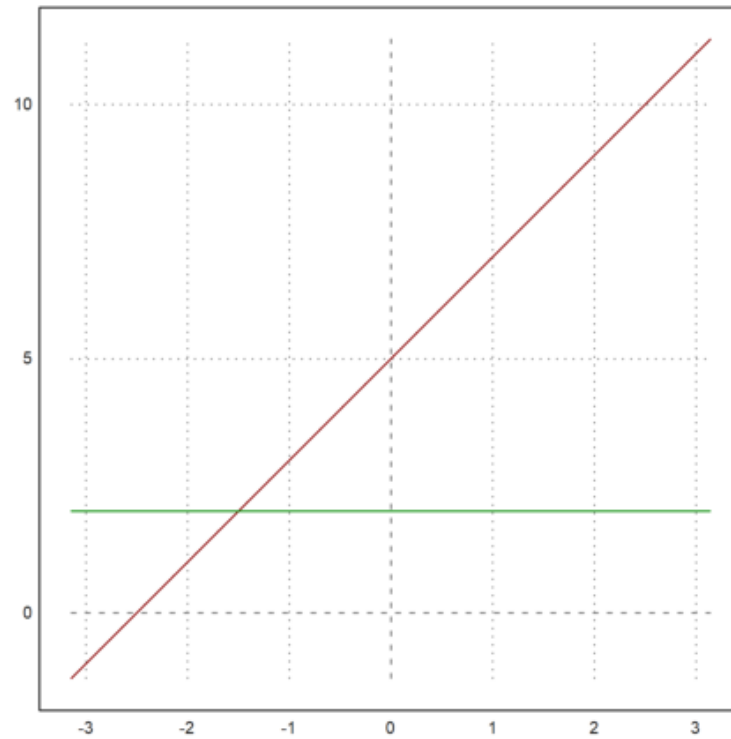
```
>function f(x) &= 2*x+5 // definisikan f(x)=2x+5
```

$$2x + 5$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

2

```
>plot2d(["f(x)", "df(x)"], -pi, pi, color=[red, green]):
```



grafik fungsi dan grafik turunanya

$$f(x) = \log(x)$$

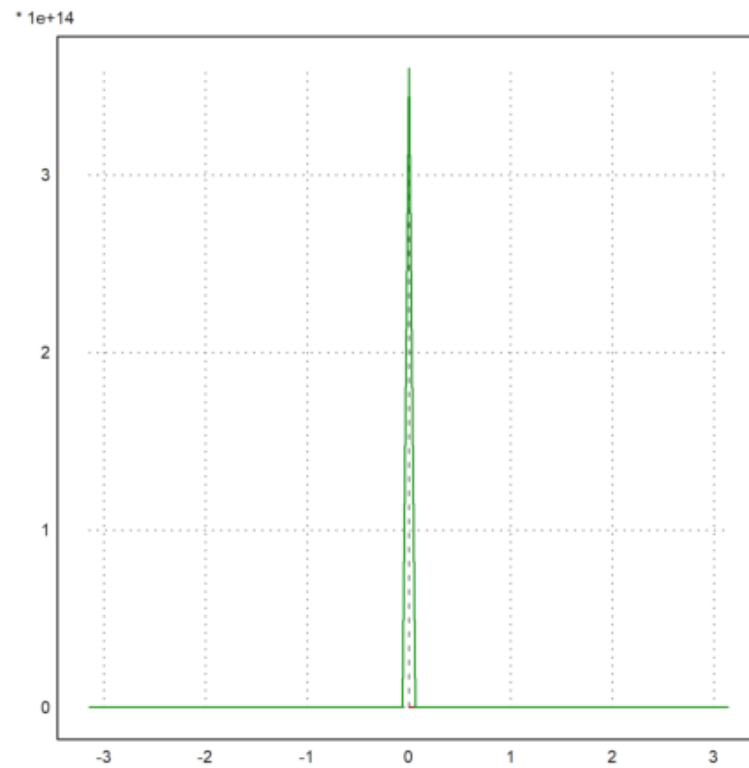
```
>function f(x) &= log(x) // definisikan f(x)=log(x)
```

$$\log(x)$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{1}{x}$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[red,green]):
```



Sifat-Sifat Turunan Fungsi

1. Sifat Linear

Turunan dari jumlah atau selisih dua fungsi adalah jumlah atau selisih dari turunan-turunan fungsi-fungsi tersebut.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

```
>function f(x) &= 3*x^2+2*x-1
```

$$3x^2 + 2x - 1$$

```
>function g(x) &= x^4+2*x^3
```

$$x^4 + 2x^3$$

```
>function A(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $A(x) // A(x) = f'(x)
```

$$6x + 2$$

```
>function B(x) &= limit((g(x+h)-g(x))/h,h,0); $B(x) // B(x) = g'(x)
```

$$4x^3 + 6x^2$$

```
>function T(x) &= (f(x)+g(x)); $T(x) // T(x)=(f(x)+g(x))
```

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$$

```
>function U(x) &= limit((T(x+h)-T(x))/h,h,0); $U(x) // U(x) = T'(x) atau U(x)=(f(x)+g(x))'
```

$$4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

```
>function R(x) &= (A(x)+B(x)); $R(x) // R(x) = (A(x)+B(x)) atau R(x)= f'(x)+g'(x)
```

$$4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

2. Aturan Perkalian

Turunan dari perkalian dua fungsi adalah hasil dari turunan pertama dikalikan dengan fungsi kedua ditambah fungsi pertama dikalikan dengan turunan kedua.

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

```
>function f(x) &= 2*x^2
```

$$2x^2$$

```
>function g(x) &= 2*x+2
```

$$2x + 2$$

```
>function A(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $A(x) // A(x) = f'(x)
```

$$4x$$

```
>function B(x) &= limit((g(x+h)-g(x))/h,h,0); $B(x) // B(x) = g'(x)
```

$$2$$

```
>function T(x) &= (f(x)*g(x)); $T(x) // T(x)=(f(x)*g(x))
```

$$2x^2(2x+2)$$

```
>function U(x) &= limit((T(x+h)-T(x))/h,h,0); $U(x) // U(x) = T'(x) atau U(x)=(f(x)+g(x))'
```

$$12x^2 + 8x$$

```
>function R(x) &= ((A(x)*g(x))+(f(x)*B(x))); $R(x) // R(x) = (A(x)*B(x)) atau R(x)= ((f'(x)*g(x))+(f
```

$$4x^2 + 4x(2x+2)$$

```
>$expand(R(x))
```

$$12x^2 + 8x$$

3. Aturan Rantai(Chain Rule)

Aturan rantai digunakan ketika kita memiliki komposisi fungsi, yaitu suatu fungsi yang terdiri dari fungsi-fungsi lain. Aturan rantai mengatakan bahwa turunan dari fungsi komposisi adalah produk dari turunan-turunan fungsi-fungsi tersebut.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)).g'(x)$$

4. Turunan Konstanta

Turunan dari suatu konstanta adalah nol.

$$(c)' = 0$$

5. Turunan Identitas

Turunan dari x terhadap x adalah 1.

$$(x)' = 1$$

6. Turunan dari x^n

Jika

$$f(x) = x^n,$$

dimana n adalah bilangan bulat positif,
maka

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

7. Turunan Eksponensial

Turunan dari fungsi eksponensial, seperti

$$f(x) = e^x$$

adalah dirinya sendiri, yaitu

$$f'(x) = e^x$$

$$(e^x)' = e^x$$

8. Turunan Logaritma

Turunan dari logaritma alami, seperti

$$f(x) = \ln(x)$$

adalah $1/x$, yaitu

$$f'(x) = 1/x$$

$$(\ln(x))' = 1/x$$

1. Turunan dari fungsi berikut

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

```
>function f(x) &= 3*x^2+2*x-1 // definisikan f(x)=3*x^2+2*x-1
```

$$3x^2 + 2x - 1$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$6x + 2$$

2. Turunan dari fungsi berikut

$$f(x) = x^4$$

```
>$showev('limit(((x+h)^4-x^4)/h,h,0)) // turunan x^4
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = 4x^3$$

```
>p &= expand((x+h)^4-x^4)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$4x^3 + 6hx^2 + 4h^2x + h^3$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$4x^3$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$4x^3$$

3. Turunan dari fungsi berikut

$$f(x) = 2x^4$$

```
>$showev('limit((2*(x+h)^4-2*x^4)/h,h,0)) // turunan 2x^4
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^4 - 2x^4}{h} = 8x^3$$

```
>p = expand(2*(x+h)^4-2*x^4)|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$8hx^3 + 12h^2x^2 + 8h^3x + 2h^4$$

```
>q = ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan
```

$$8x^3 + 12hx^2 + 8h^2x + 2h^3$$

```
>$limit(q,h,0) // nilai limit sebagai turunan
```

$$8x^3$$

4. Turunan dari dari fungsi berikut

$$f(x) = 2x + 5$$

```
>$showev('limit(((2*(x+h)+5)-(2*x+5))/h,h,0)) // turunan 2x+5
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = 2$$

```
>p &= expand((2*(x+h)+5)-(2*x+5))|simplify; $p //pembilang dijabarkan dan disederhanakan
```

$$2h$$

```
>q &=ratsimp(p/h); $q // ekspresi yang akan dihitung limitnya disederhanakan dan nilai limit sebagai
```

5. Turunan dari

$$5x^4 - 3x^2$$

```
>function f(x) &= 5*x^4-3*x^2 // definisikan f(x)=5*x^4-3*x^2
```

$$5x^4 - 3x^2$$

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$20x^3 - 6x$$

6. Turunan dari

$$\log 100$$

```
>$showev('limit((log(100+h)-log(100))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(h+100) - \log 100}{h} = \frac{1}{100}$$

```
>$showev('limit((log((100+h)/(100)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{h+100}{100}\right)}{h} = \frac{1}{100}$$

```
>$showev('limit((log((1+h/100)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{h}{100} + 1\right)}{h} = \frac{1}{100}$$

```
>$showev('limit(((h/100))/h,h,0))//menggunakan identitas logaritma, sisanya adalah hasil turunan
```

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{100}$$

7. Turunan dari

$$\log(3987)$$

```
>$showev('limit((log(3987+h)-log(3987))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(h + 3987) - \log 3987}{h} = \frac{1}{3987}$$

```
>$showev('limit((log((3987+h)/(3987)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{h+3987}{3987}\right)}{h} = \frac{1}{3987}$$

```
>$showev('limit((log((1+h/3987)))/h,h,0))//definisi logaritma
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{h}{3987} + 1\right)}{h} = \frac{1}{3987}$$

```
>$showev('limit(((h/3987))/h,h,0))//menggunakan identitas logaritma, sisanya adalah hasil turunan
```

$$\frac{1}{3987} = \frac{1}{3987}$$

8. Turunan dari

$$f(x) = -\cos(x)\sin(x)$$

```
>function f(x) &= -cos(x)
```

$$-\cos(x)$$

```
>function g(x) &= sin(x)
```

$$\sin(x)$$

```
>function A(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $A(x) // A(x) = f'(x)
```

$$\sin x$$

```
>function B(x) &= limit((g(x+h)-g(x))/h,h,0); $B(x) // B(x) = g'(x)
```

$$\cos x$$

```
>function T(x) &= (f(x)*g(x)); $T(x) // T(x)=(f(x)*g(x))
```

$$-\cos x \sin x$$

```
>function U(x) &= limit((T(x+h)-T(x))/h,h,0); $U(x) // U(x) = T'(x) atau U(x)=(f(x)+g(x))'
```

$$\sin^2 x - \cos^2 x$$

```
>function R(x) &= ((A(x)*g(x))+(f(x)*B(x))); $R(x) // R(x) = (A(x)*B(x)) atau R(x)= ((f'(x)*g(x))+(f
```

$$\sin^2 x - \cos^2 x$$

KALKULUS

Nama : Jayanti Qusnul Aisyah
Prodi : Pendidikan Matematika
NIM : 22301244016

Integral Tak Tentu

DEFINISI

Integral Tak Tentu (undefined integral) adalah bentuk integral yang variabel integrasinya tidak memiliki batas sehingga integrasi dari sebuah fungsi akan menghasilkan banyak kemungkinan dan hanya dinyatakan sebagai penyelesaian umum. Istilah tak tentu berarti bentuk fungsi $F(x)$ memuat konstanta real sembarang.

Misalkan diketahui suatu fungsi $F(x)$ yang merupakan fungsi umum yang bersifat $F'(x)=f(x)$, maka integral tak tentu merupakan himpunan anti turunan $F(x)$ dari $f(x)$ pada interval negatif tak hingga sampai tak hingga yang dinotasikan :

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$

KURVA FUNGSI ANTIDERIVATIF

Kurva fungsi antiderivatif adalah kurva yang menggambarkan hubungan antara suatu fungsi dan antiderivatifnya. Antiderivatif, juga dikenal sebagai integral tak tentu.

Dalam integral, fungsi antiderivatif dapat dianggap sebagai "anti turunan" dari fungsi aslinya.

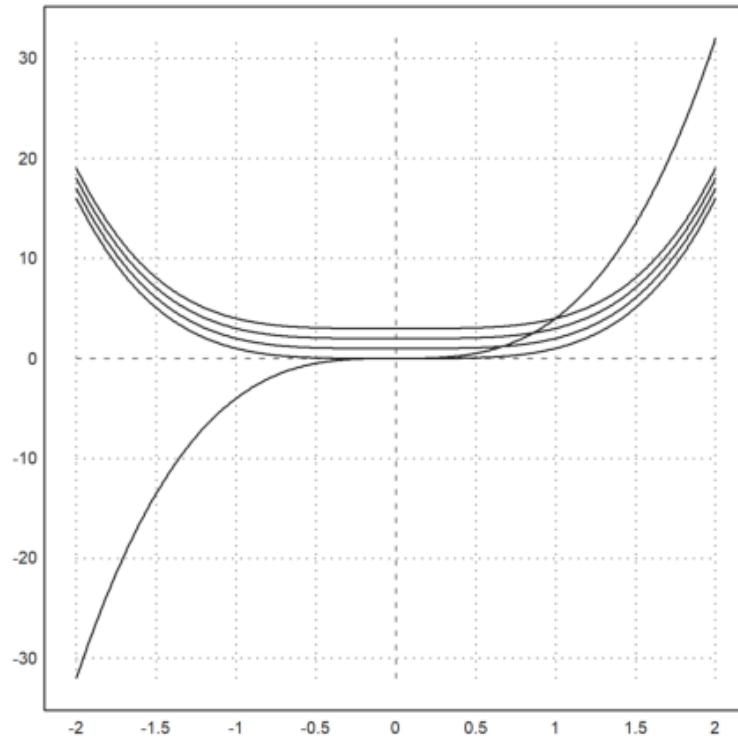
1. kurva antiderivatif dari fungsi aljabar dengan

$$f(x) = 4x^3$$

```
>$showev('integrate(4*x^3,x)+c)
```

$$4 \int x^3 dx + c = x^4 + c$$

```
>plot2d(["4*x^3","x^4","x^4+1","x^4+2","x^4+3"]):
```



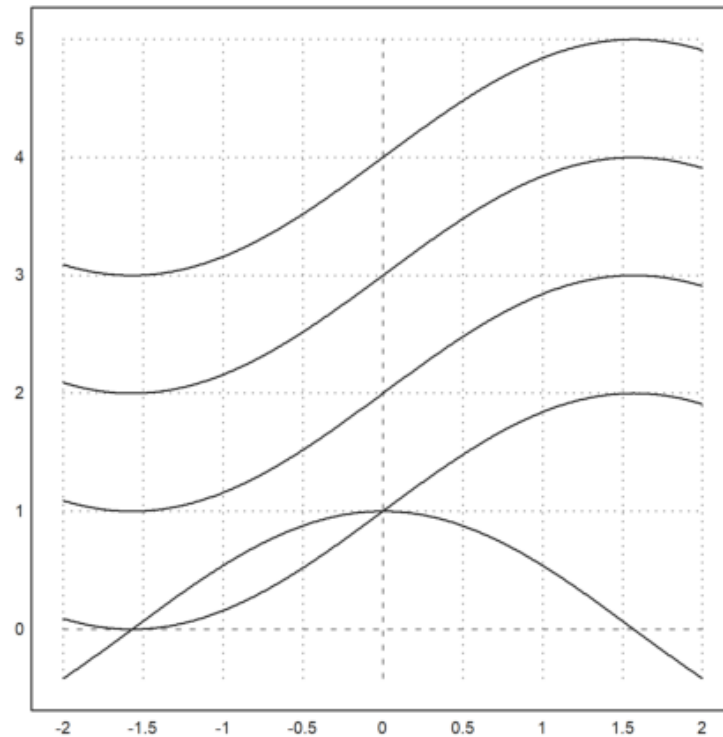
2. kurva antiderivatif dari fungsi trigonometri dengan

$$f(x) = \cos x$$

```
>$showev('integrate(cos(x),x)+c)
```

$$\int \cos x \, dx + c = \sin x + c$$

```
>plot2d(["cos(x)","sin(x)+1","sin(x)+2","sin(x)+3","sin(x)+4"]):
```



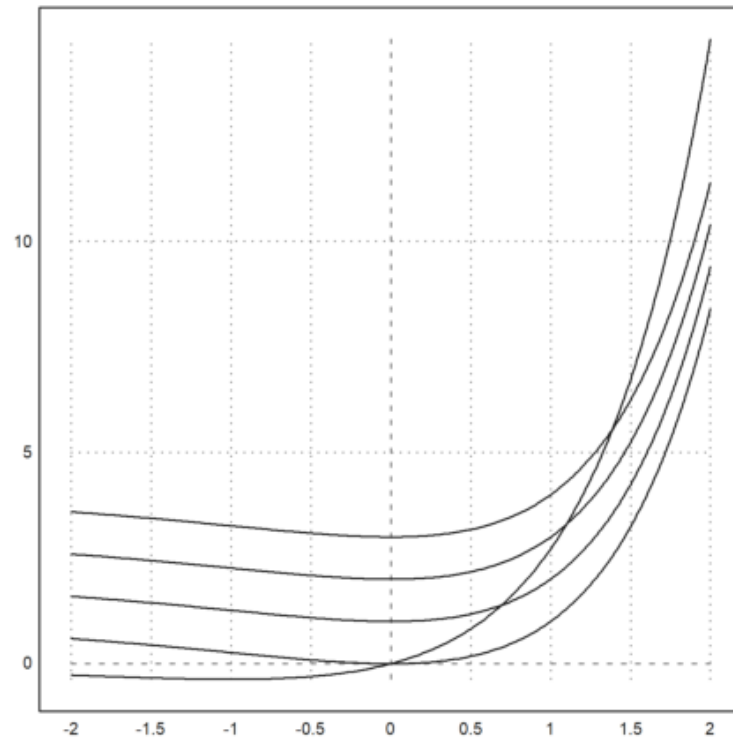
3. kurva antiderivatif dari fungsi eksponensial dengan

$$f(x) = xe^x$$

```
>$showev('integrate(x*E^x,x)+c)
```

$$\int x e^x dx + c = (x - 1) e^x + c$$

```
>plot2d(["x*E^x","(x-1)E^x+1","(x-1)E^x+2","(x-1)E^x+3","(x-1)E^x+4"]):
```



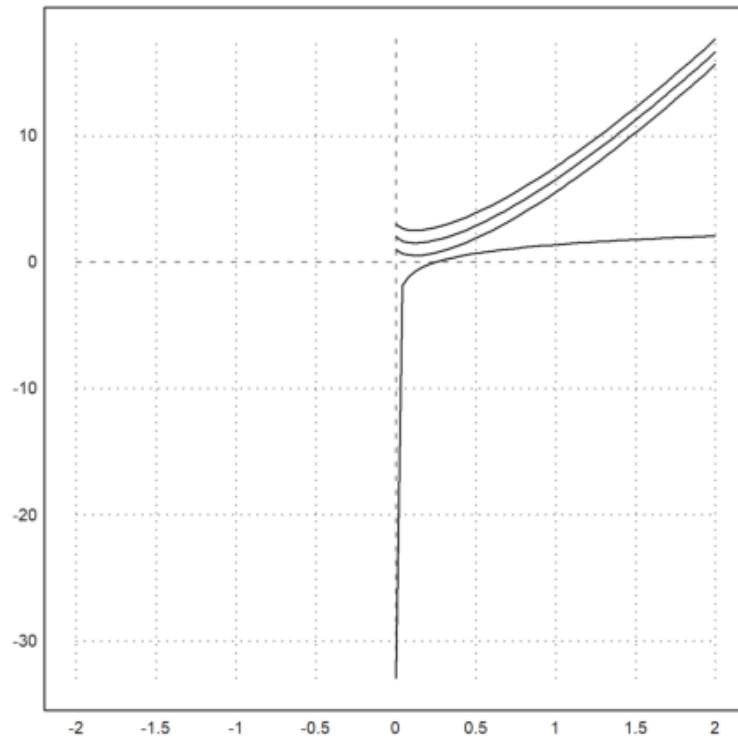
4. kurva antiderivatif dari fungsi logaritma dengan

$$f(x) = \log(4x)$$

```
>$showev('integrate(log(4*x),x)+c)
```

$$\int \log(4x) dx + c = \frac{4x \log(4x) - 4x}{4} + c$$

```
>plot2d(["log(4*x)","(4*x)log(4*x)-4*x/4 +1","(4*x)log(4*x)-4*x/4 +2","(4*x)log(4*x)-4*x/4 +3"]):
```



5. kurva antiderivatif dari fungsi komposisi dengan

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 2x + 1$$

dengan

$$f(g(x))$$

```
>function f(x) &&= x+1
```

$$x + 1$$

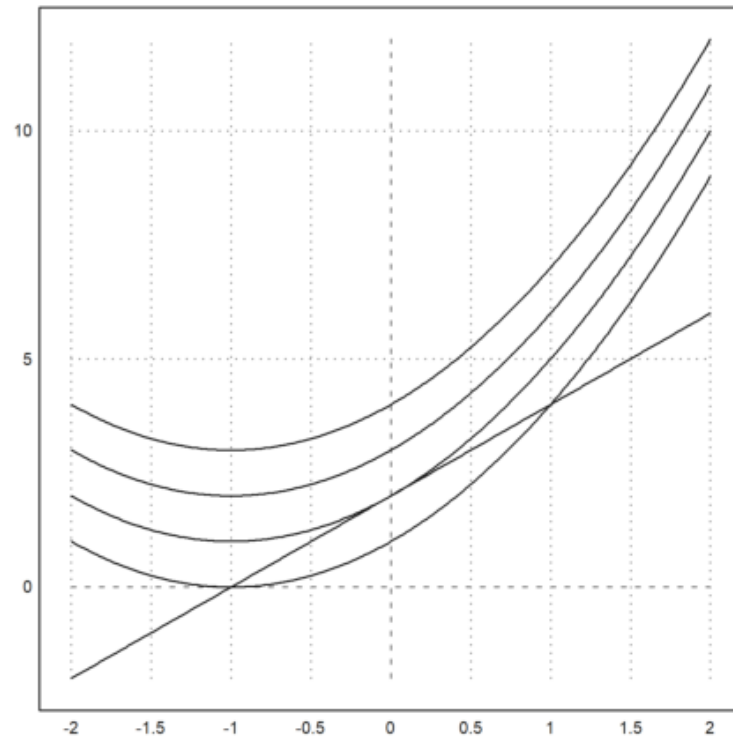
```
>function g(x) &&= 2*x+1
```

$$2x + 1$$

```
>$showev('integrate(f(g(x)),x)+c)
```

$$\int 2x + 2 \, dx + c = x^2 + 2x + c$$

```
>plot2d(["2*x+2", "x^2+2*x+1", "x^2+2*x+2", "x^2+2*x+3", "x^2+2*x+4"]):
```



SIFAT INTEGRAL TAK TENTU

1. Sifat Pangkat

Jika n adalah sembarang bilangan rasional kecuali -1 , maka integral

tak tentu dari x^n ditulis :

$$\int x^n dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

2. Penjumlahan dan Pengurangan

$$\int [g(x) + f(x)] dx = \int g(x) dx + \int f(x) dx$$

$$\int [g(x) - f(x)] dx = \int g(x) dx - \int f(x) dx$$

3. Konstanta

Andaikan f dan g mempunyai integral tak tentu dan andaikan k suatu

konstanta, maka :

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

RUMUS INTEGRAL TAK TENTU

Integral tak tentu berarti nilai atau batasannya belum pasti, sehingga ada nilai konstanta(c) di dalamnya. Jadi rumus dasar integral tak tentu adalah :

```
>$showev('integrate(x^n,x)+c)
```

Answering "Is n equal to -1?" with "no"

$$\int x^n dx + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

```
>$showev('integrate(x^-1,x)+c)
```

$$\int \frac{1}{x} dx + c = \log x + c$$

CONTOH SOAL

1. tentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut :

$$f(x) = x^5$$

```
>$showev('integrate(x^5,x)+c)
```

$$\int x^5 dx + c = \frac{x^6}{6} + c$$

2. tentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar berikut :

$$f(x) = 9x^2$$

```
>$showev('integrate(9*x^2,x)+c)
```

$$9 \int x^2 dx + c = 3x^3 + c$$

3. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :

$$f(x) = 2\sin x$$

```
>$showev('integrate(2*sin(x),x)+c)
```

$$2 \int \sin x \, dx + c = c - 2 \cos x$$

4. tentukan integral tak tentu dari fungsi trigonometri berikut :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

```
>$showev('integrate(sin(x)-cos(x),x)+c)
```

$$\int \sin x - \cos x \, dx + c = -\sin x - \cos x + c$$

5. tentukan integral tak tentu dari fungsi eksponensial berikut :

$$f(x) = e^{2x}$$

```
>$showev('integrate((E^x)^2,x)+c)
```

$$\int e^{2x} dx + c = \frac{e^{2x}}{2} + c$$

6. tentukan integral tak tentu dari fungsi eksponensial berikut :

$$f(x) = xe^x$$

```
>$showev('integrate(x*E^x,x)+c)
```

$$\int x e^x dx + c = (x - 1) e^x + c$$

7. tentukan integral tak tentu dari fungsi logaritma berikut :

$$f(x) = \log x$$

```
>$showev('integrate(ln(x),x)+c)
```

$$\int \log x \, dx + c = x \log x - x + c$$

8. tentukan integral tak tentu dari fungsi logaritma berikut :

$$\log\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

```
>$showev('integrate(ln(x+1/x),x)+c)
```

$$\int \log\left(x + \frac{1}{x}\right) dx + c = x \log\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 \arctan x - x + c$$

9. fungsi komposisi berikut dengan

$$f(x) = 3x + 2$$

$$g(x) = 4x - 3$$

tentukan integral tak tentu dari

$$f(g(x))$$

$$g(f(x))$$

```
>function f(x) &&= 3*x+2
```

$$3x + 2$$

```
>function g(x) &&= 4*x-3
```

$$4x - 3$$

```
>$showev('integrate(f(g(x)),x)+c)
```

$$\int 3(4x - 3) + 2 \, dx + c = 3(2x^2 - 3x) + 2x + c$$

```
>$showev('integrate(g(f(x)),x)+c)
```

$$\int 4 (3x + 2) - 3 \, dx + c = 4 \left(\frac{3x^2}{2} + 2x \right) - 3x + c$$

10. Tentukan integral tak tentu yang menggunakan sifat pengurangan dan penjumlahan dari fungsi komposisi nomor 9

```
>$showev('integrate(f(x)-(g(x))^2,x)+c)
```

$$\int -(4x - 3)^2 + 3x + 2 \, dx + c = -\frac{16x^3}{3} + \frac{27x^2}{2} - 7x + c$$

```
>$showev('integrate(f(x)+(g(x))^2,x)+c)
```

$$\int (4x - 3)^2 + 3x + 2 \, dx + c = \frac{16x^3}{3} - \frac{21x^2}{2} + 11x + c$$

Integral Tentu

Nama : Nur Baeti Solihah
NIM : 22301241023
Kelas : Pendidikan Matematika A 2022

Integral tentu merupakan integral dari suatu fungsi yang nilai-nilai variabel bebasnya(memiliki batas-batas) tertentu. Integral tentu dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad \text{dengan } F'(x) = f(x).$$

Misalnya mencari hasil dari fungsi integral:

$$\int_2^3 6x + 2 \, dx$$

dengan menggunakan rumus kita peroleh:

$$\int_2^3 6x + 2 \, dx = [6x + 2]_2^3 = 6(3) + 2 - 6(2) + 2 = 20 - 14 = 6.$$

Bagaimana dengan soal berikut:

$$\int_0^1 x^2 - 4x + 3 \, dx$$
$$\int_2^6 1 + \cos t \, dt$$

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, integral dapat diselesaikan dengan EMT yaitu dengan fungsi "integrate". Fungsi tersebut berlaku untuk integral tak tentu maupun integral tentu. EMT juga dapat digunakan untuk menghitung integral tentu dengan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

```
>$showev('integrate(x^2,x,a,b))
```

$$\int_a^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Fungsi "showev" digunakan untuk menampilkan atau melihat hasil perhitungan. Setelah fungsi integrate, diikuti fungsi, terhadap variabel apa, batas bawah, dan batas atas.

```
>$showev('integrate(x^2-4*x+3,x,0,1))
```

$$\int_0^1 x^2 - 4x + 3 \, dx = \frac{4}{3}$$

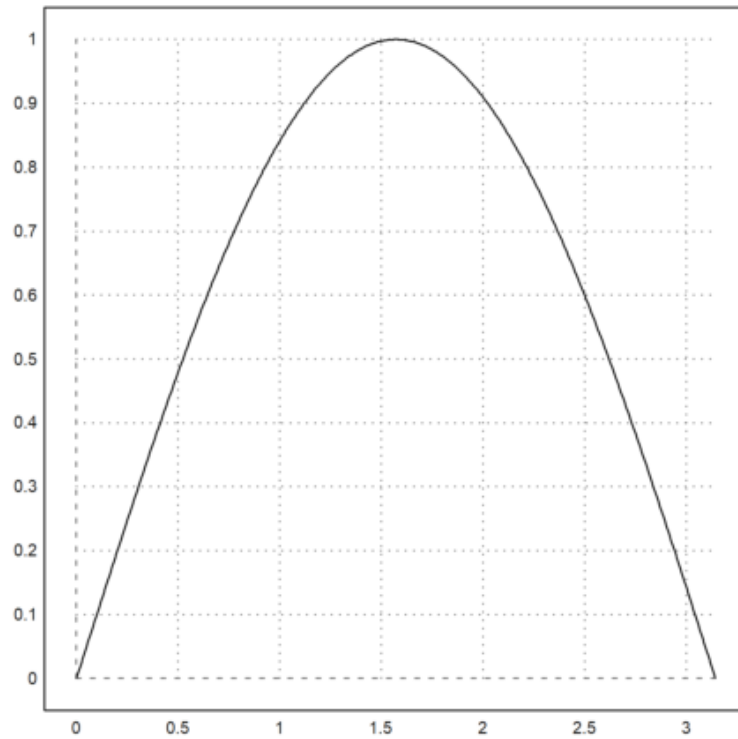
```
>$showev('integrate(1+cos(t),t,2,6))
```

$$\int_2^6 \cos t + 1 \, dt = \sin 6 - \sin 2 + 4$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = 2$$

```
>plot2d("sin(x)",0,pi):
```



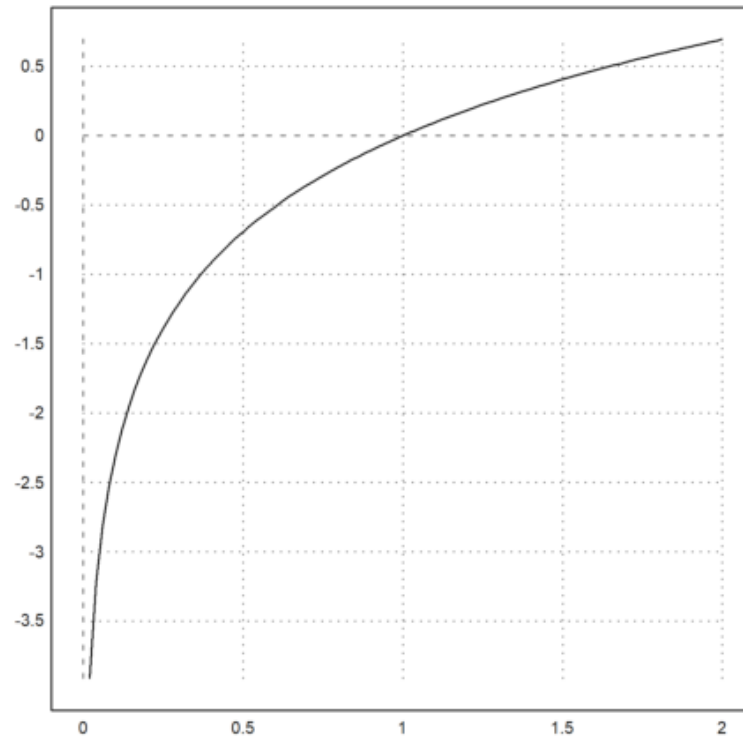
```
>$showev('integrate(sin(x)+cos(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} \sin x + \cos x \, dx = 2$$

```
>$showev('integrate(log(x),x,0,2))
```

$$\int_0^2 \log x \, dx = 2 \log 2 - 2$$

```
>plot2d("log(x)",0,2):
```



```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{25^{\frac{5}{2}}}{21} - \frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{2x+1} \, dx = \frac{2 \cdot 5^{\frac{7}{2}} - 2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = (-e^{\pi} - 1) \sin a + (e^{\pi} + 1) \cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x}+a) e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = (-e^{\pi} - 1) (\sin a - \cos a)$$

```
>function map f(x)&=E^(-x^2)
```

$$E^{-x^2}$$

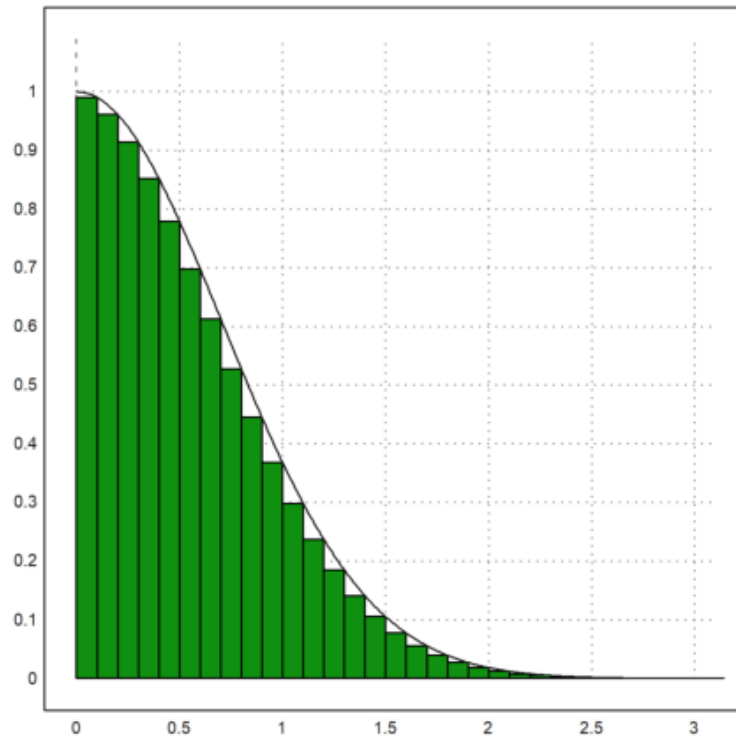
Fungsi f diatas tidak memiliki antiturunan yang dapat diungkapkan dalam bentuk tertutup, sehingga kita tidak dapat menghitungnya dengan Teorema Dasar Kalkulus. Kita dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut dengan menggunakan metode numerik(rumus kuadratur).

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,pi))
```

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\pi)}{2}$$

Fungsi f diatas tidak memiliki antiturunan yang dapat diungkapkan dalam bentuk tertutup, sehingga kita tidak dapat menghitungnya dengan Teorema Dasar Kalkulus. Kita dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut dengan menggunakan metode numerik(rumus kuadratur).

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Integral tentu erat kaitannya dengan luas daerah dibawah kurva, sehingga menghitung fungsi diatas dapat di hampiri dengan jumlah luas persegi panjang-persegi panjang di bawah kurva tersebut. Cara menghitungnya adalah dengan langkah-langkah sebagai berikut:
Langkah pertama, yaitu kita dapat menyimpan nilai-nilai x ke dalam variabel misalkan r.

```
>r <- makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1);
```

Selanjutnya kita dapat menyimpan nilai dari masing-masing $f(x)$.

```
>fx &= makelist(f(r[i]+0.1),i,1,length(r));  
>0.1*sum(f(x+0.1))
```

0.836219610253

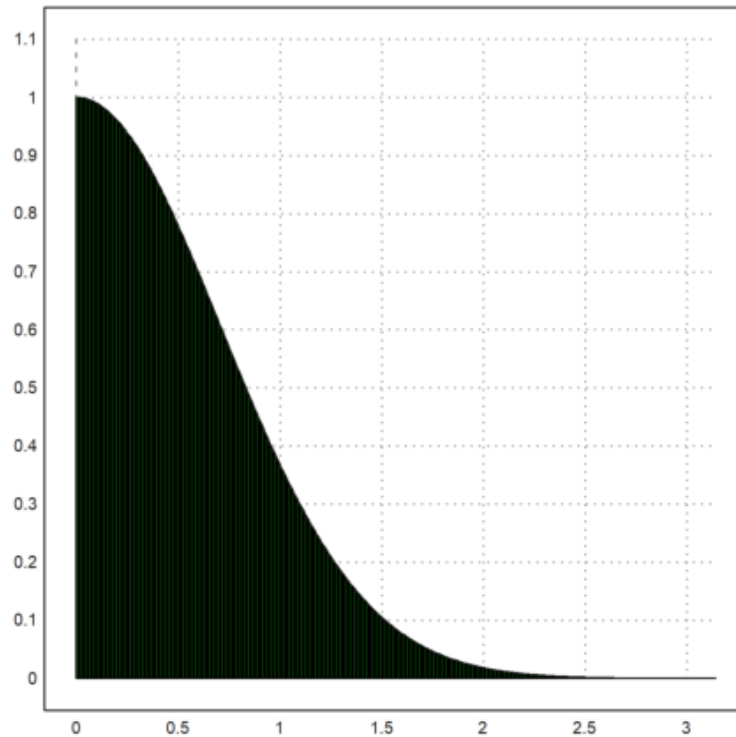
jadi hasilnya adalah:

$$\int_0^{\pi} e^{-x^2} dx = 0.8362196102528469$$

Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai $f(x)$ untuk $x = 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 3.2$.

Jika kita memperbanyak jumlah persegi panjang dibawah kurva, maka lebar sub-intervalnya akan semakin kecil dan persegi panjangnya akan menutup daerah dibawah kurva dengan sempurna. Untuk mendapatkan hasil yang mendekati nilai sebenarnya kita dapat gunakan misalnya lebar sub-interval misalnya 0.01, atau jika ingin lebih presisi lagi bisa 0.001 dan seterusnya. Kita akan mencoba menghitung integral fungsi diatas dengan dengan r yang diperkecil lagi menjadi 0.01.

```
>x=0:0.01:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```



Gambar diatas jika dibandingkan dengan gambar sebelumnya, terlihat perbedaannya dimana jika gambar pertama daerah dibawah kurva masih belum tertutup sempurna, tetapi pada gambar diatas terlihat bahwa daerah dibawah kurva lebih tertutup sempurna dan tidak terlihat daerah yang masih berlubang. Jika kita hitung integral fungsinya maka akan diperoleh hasil yang mendekati sebenarnya.

```
>r <- makelist(a,a,0,pi-0.01,0.01);
>fx <- makelist(f(r[i]+0.01),i,1,length(r));
>0.01*sum(f(x+0.01))
```

0.881219234865

Integral fungsi diatas yang memiliki batas tidak dapat kita hitung langsung secara eksak, tetapi ternyata jika kita mengubah batasnya menjadi tak hingga kita dapat menghitungnya secara eksak. Berikut akan ditunjukkan contohnya.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Contoh lain fungsi tidak memiliki antiderivatif yang hanya dapat dihitung dengan metode numerik adalah sebagai berikut.

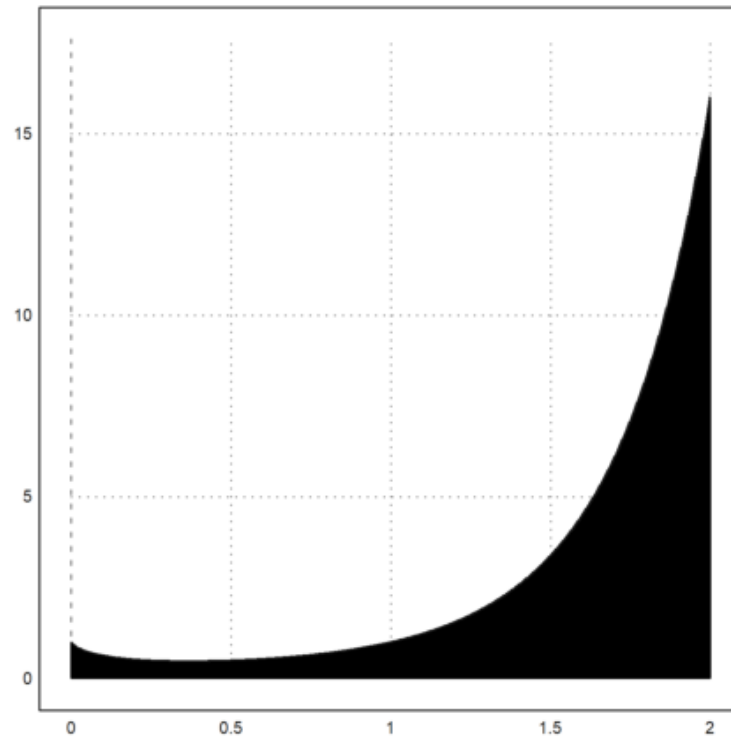
```
>function f(x) <- x^(2*x)
```

$$x^{2x}$$

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,2))
```

$$\int_0^2 x^{2x} dx = \int_0^2 x^{2x} dx$$

```
>x=0:0.002:2-0.002; plot2d(x,f(x+0.002),>bar); plot2d("f(x)",0,2,>add):
```



```
>k <- makelist(a,a,0,pi-0.002,0.002);  
>fx <- makelist(f(k[i]+0.002),i,1,length(k));  
>0.002*sum(f(x+0.002))
```

5.54658986236

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

$$\sin^2(3x^5 + 7)$$

```
>integrate(f,0,1)
```

0.542581176074

Berikut adalah contoh integral fungsi eksponensial yang dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1))
```

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

Sifat-Sifat Integral Tentu

1. Sifat Kelinearan

Jika suatu fungsi misalnya f dan g terintegralkan pada interval $[a,b]$ dan k adalah suatu konstanta, maka berlaku:

$$\begin{aligned}\int_a^b k \cdot f(x) \, dx &= k \int_a^b f(x) \, dx \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \\ \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx\end{aligned}$$

```
>$showev('integrate(2*x,x,0,1))
```

$$2 \int_0^1 x \, dx = 1$$

```
>$showev('integrate(3*x^2+4*x,x,0,2))
```

$$\int_0^2 3x^2 + 4x \, dx = 16$$

```
>$showev('integrate(3*x^2,x,0,2))+(integrate(4*x,x,0,2))
```

$$3 \int_0^2 x^2 \, dx + 4 \int_0^2 x \, dx = 4 \int_0^2 x \, dx + 8$$

```
>$showev('integrate(4*x,x,0,2))+8
```

$$4 \int_0^2 x \, dx + 8 = 16$$

Dari kedua cara menghitung integral fungsi diatas keduanya menghasilkan nilai yang sama.

2. Sifat Perubahan Batas

Jika suatu fungsi misalnya f terintegralkan pada interval $[a,b]$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) \, dx &= 0 \\ \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx \end{aligned}$$

```
>$showev('integrate(x^2-3*x+1,x,2,2))
```

$$0 = 0$$

Apabila kita tulis integralnya dalam bentuk notasi matematika yaitu sebagai berikut.

$$\int_2^2 x^2 - 3x + 1 \, dx$$

Menghasilkan nilai 0 karena batas atas dan bawahnya sama.

```
>$showev('integrate(x,x,2,1))
```

$$-\int_1^2 x \, dx = -\frac{3}{2}$$

Jika kita tuliskan integralnya dengan notasi matematika akan menjadi

$$\int_2^1 x \, dx$$

dan jika kita integralkan langsung akan menghasilkan nilai yang negatif dari selisih perkalian kedua batas terhadap fungsi. Sehingga, nilainya akan sama jika kita menggunakan cara seperti perhitungan pada EMT diatas.

3. Sifat Penambahan Interval

Jika suatu fungsi misalnya f terintegralkan pada suatu interval yang memuat tiga titik misalnya a, b, c , maka berlaku:

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

Misalnya kita akan menghitung soal integral

$$\int_0^3 3x^3 dx$$

```
>$showev('integrate(3*x^3,x,0,3))
```

$$3 \int_0^3 x^3 dx = \frac{243}{4}$$

```
>$showev('integrate(3*x^3,x,0,1)))+(integrate(3*x^3,x,1,3))
```

$$3 \int_1^3 x^3 dx + 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \int_1^3 x^3 dx + \frac{3}{4}$$

```
>$showev('integrate(3*x^3,x,1,3)+3/4)
```

$$3 \int_1^3 x^3 dx + \frac{3}{4} = \frac{243}{4}$$

4. Sifat Kesimetrian

Jika f merupakan fungsi genap, maka berlaku:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Jika f merupakan fungsi ganjil, maka berlaku:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

```
>$showev('integrate(x^2,x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Kita coba dengan menggunakan batas batas sesuai sifatnya

```
>$showev('integrate(2*x^2,x,0,1))
```

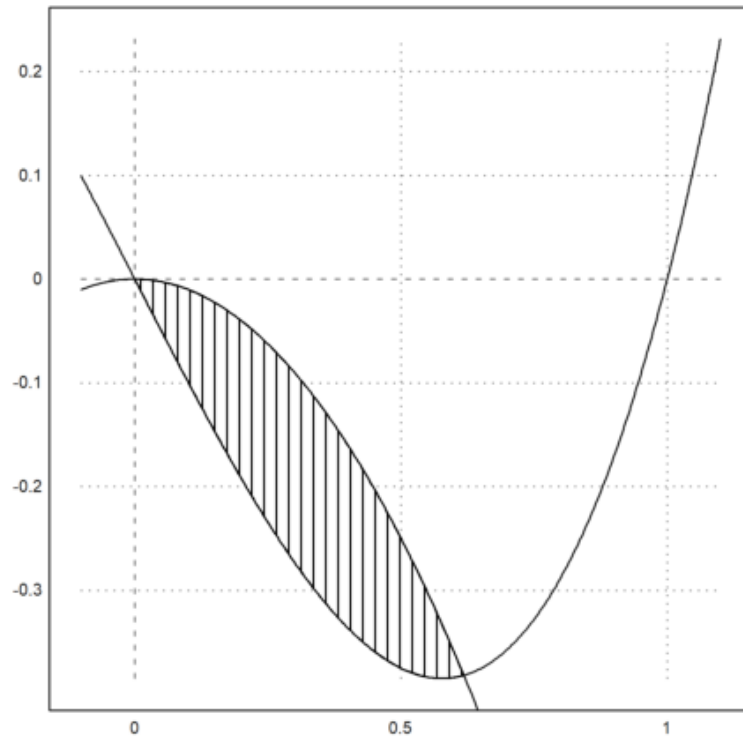
$$2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Hasilnya sama dengan cara perhitungan sebelumnya.

```
>plot2d("x^3-x",-0.1,1.1); plot2d("-x^2",>add);  
>b=solve("x^3-x+x^2",0.5); x=linspace(0,b,200); xi=flipx(x);
```

Menggunakan perintah diatas kita mendapatkan penyelesaian dari gabungan kedua fungsi diatas yang kemudian disimpan dalam variabel b. Kemudian dibuat baris array x yang berisi 200 nilai dengan interval dari 0 sampai b untuk kemudian dibali urutan nilai-nilainya menjadi baris baru yaitu xi.

```
>plot2d(x|xi,x^3-x|-xi^2,>filled,style="|",fillcolor=1,>add):
```



```
>a=solve("x^3-x+x^2",0), b=solve("x^3-x+x^2",1)
```

```
0  
0.61803398875
```

Hasil diatas merupakan absis dari kedua titik potong kurva.

```
>integrate("(-x^2)-(x^3-x)",a,b)//luas daerah yang diarsir
```

0.0758191713542

Hasil perhitungan tadi jika dibandingkan dengan hasil perhitungan analitik akan menghasilkan nilai perhitungan yang sama. Kita coba dengan perhitungan analitik sebagai berikut.

```
>a &=solve((-x^2)-(x^3-x),x); $a
```

$$\left[x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}, x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, x = 0 \right]$$

```
>$showev('integrate(-x^2-x^3+x,x,0,(sqrt(5)-1)/2))
```

$$\int_0^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} -x^3 - x^2 + x \, dx = \frac{13 - 5^{\frac{3}{2}}}{24}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{0.0}^{0.6180339887498949} -1.0 x^3 - 1.0 x^2 + x \, dx = 0.07581917135421037$$

Hasil perhitungan analitik menunjukkan hasil yang sama dengan perhitungan sebelumnya.

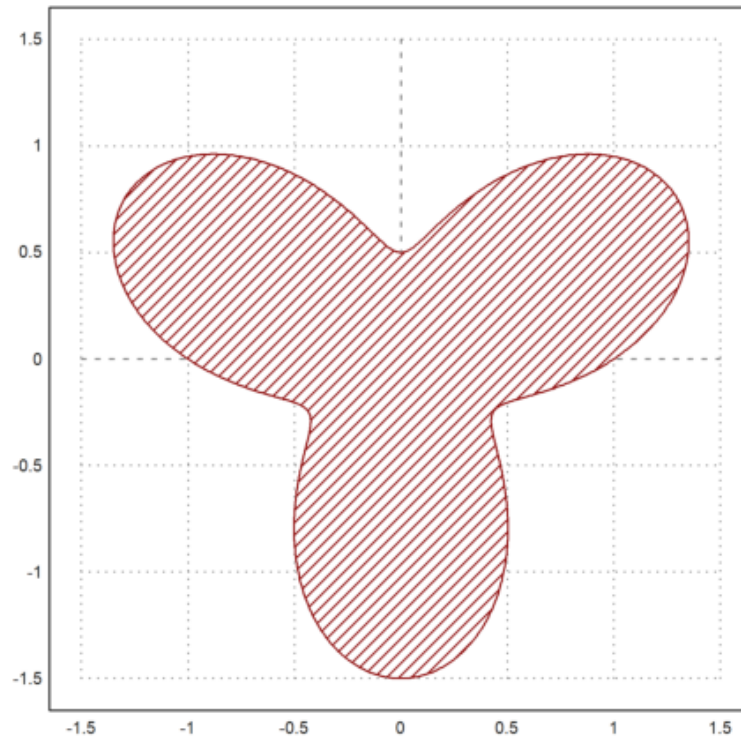
Selain untuk menghitung luas daerah dibawah kurva, integral tentu juga dapat digunakan untuk menghitung panjang kurva. Misalnya menghitung panjang kurva dan luas daerah di dalam kurva berikut.

$$\gamma(t) = (r(t) \cos(t), r(t) \sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t);  
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```



Perintah diatas akan menghasilkan larik array t yang berjumlah 1000 nilai terdistribusi dari 0 sampai 2π . Selajutnya dibuat plot dari korrdinat x dan y dengan skala yang diperbesar 1.5 kali.

```
>function r(t) &= 1+sin(3*t)/2; $'r(t)=r(t)
```

$$r(t) = \frac{\sin(3t)}{2} + 1$$

```
>function fx(t) &= r(t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$fx(t) = \cos t \left(\frac{\sin(3t)}{2} + 1 \right)$$

```
>function fy(t) &= r(t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$fy(t) = \sin t \left(\frac{\sin(3t)}{2} + 1 \right)$$

```
>function ds(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'ds(t)=ds(t)
```

$$ds(t) = \frac{\sqrt{4 \cos(6t) + 4 \sin(3t) + 9}}{2}$$

Sintaks diatas digunakan untuk menghitung panjang elemen diferensial pada kurva yaitu menghitung turunan pertama fungsi fx dan fy. Perintah "trigreduce" berfungsi untuk menyederhanakan ekspresi trigonometri dan perintah "radcan" untuk menyederhanakan ekspresi akar kuadrat.

```
>$integrate(ds(x),x,0,2*pi)
```

$$\frac{\int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos(6x) + 4 \sin(3x) + 9} dx}{2}$$

Pada pengintegralan fungsi diatas tidak bisa diselesaikan secara eksak oleh maxima sehingga kita harus menghitungnya secara numerik dengan perintah EMT.

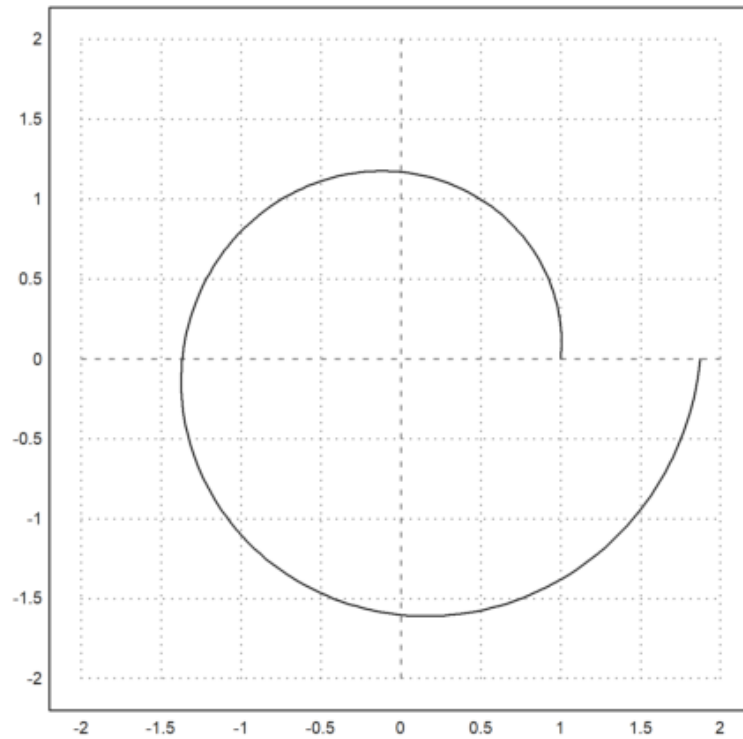
```
>integrate("ds(x)",0,2*pi)
```

```
9.0749467823
```

Kita juga bisa menghitung panjang kurva yang berbentuk spiral logaritmik. Contoh fungsinya yaitu sebagai berikut.

$$x = e^{ax} \cos x, \quad y = e^{ax} \sin x.$$

```
>a=0.1; plot2d("exp(a*x)*cos(x)","exp(a*x)*sin(x)",r=2,xmin=0,xmax=2*pi):
```



```
>&kill(a)
```

done

Perintah diatas digunakan untuk menghapus variabel a.

```
>function fx(t) &= exp(a*t)*cos(t); $'fx(t)=fx(t)
```

$$f_x(t) = e^{a \cdot t} \cos t$$

```
>function fy(t) &= exp(a*t)*sin(t); $'fy(t)=fy(t)
```

$$f_y(t) = e^{a \cdot t} \sin t$$

```
>function df(t) &= trigreduce(radcan(sqrt(diff(fx(t),t)^2+diff(fy(t),t)^2))); $'df(t)=df(t)
```

$$df(t) = \sqrt{a^2 + 1} e^{a \cdot t}$$

```
>S &=integrate(df(t),t,0,2*%pi); $S
```

$$\sqrt{a^2 + 1} \left(\frac{e^{2\pi a}}{a} - \frac{1}{a} \right)$$

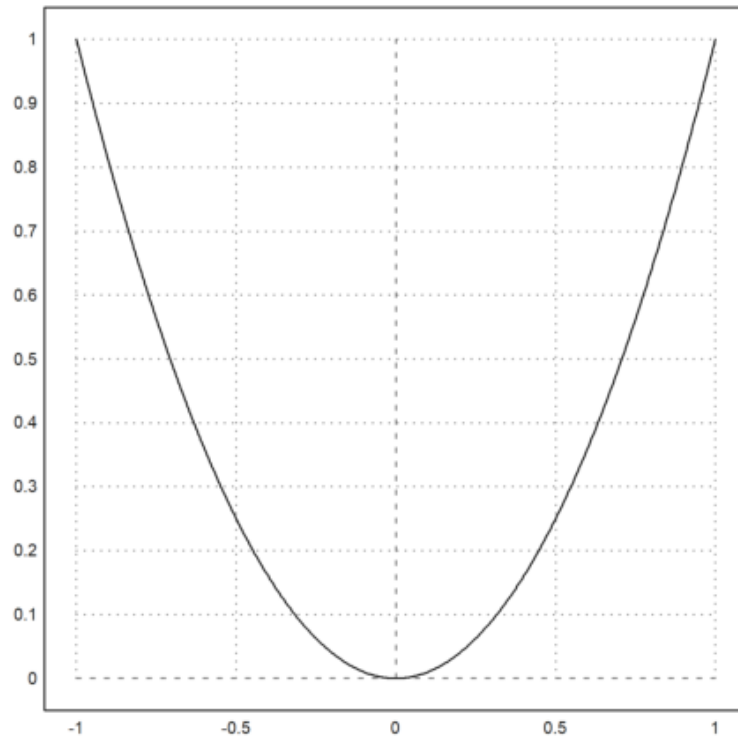
Variabel S diatas menunjukan panjang kurva spiral.

```
>S(a=0.1) // Panjang kurva untuk a=0.1
```

8.78817491636

Bentuk kurva yang dapat kita hitung lagi dengan integral yaitu parabola.
Misalnya menunjukkan bahwa keliling lingkaran dengan jari-jari r adalah $K=2\pi r$

```
>plot2d("x^2",xmin=-1,xmax=1):
```



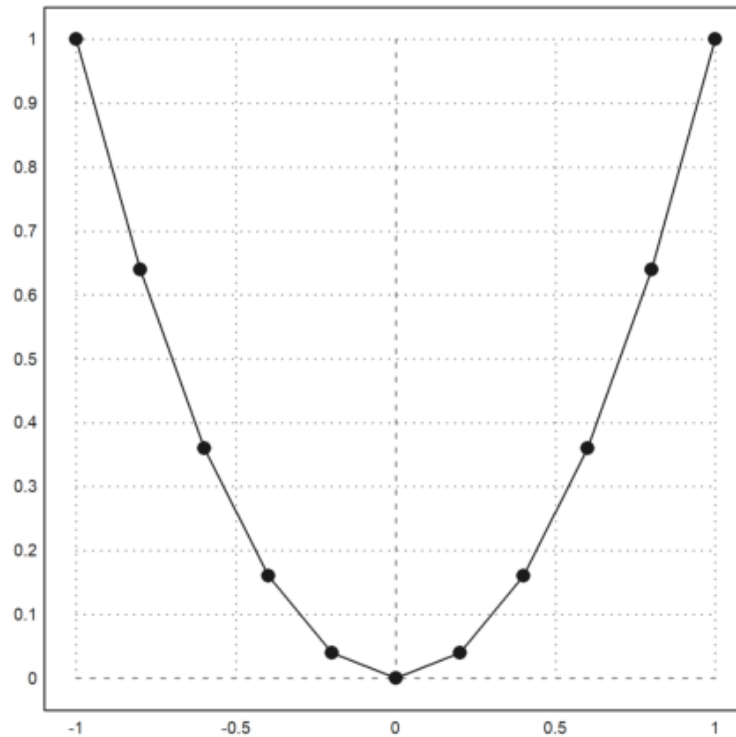
```
>$showev('integrate(sqrt(1+diff(x^2,x)^2),x,-1,1))
```

$$\int_{-1}^1 \sqrt{4x^2 + 1} \, dx = \frac{\operatorname{asinh} 2 + 2\sqrt{5}}{2}$$

```
>$float(%)
```

$$\int_{-1.0}^{1.0} \sqrt{4.0 x^2 + 1.0} \, dx = 2.957885715089195$$

```
>x=-1:0.2:1; y=x^2; plot2d(x,y);  
>plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



Menghitung panjang parabola diatas dapat dilakukan dengan menghitung jumlah panjang ruas-ruas garis yang menghubungkan titik-titik pada parabola.

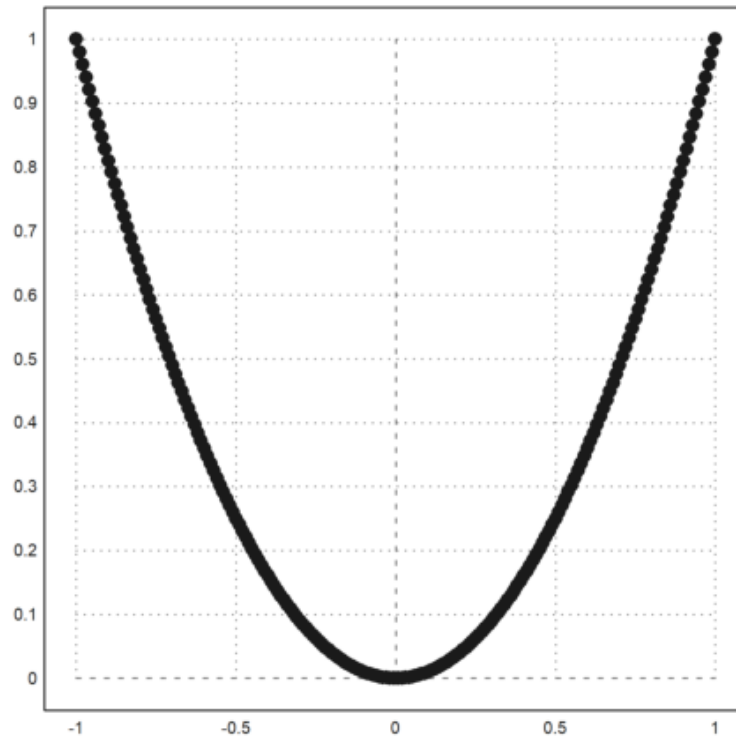
```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

2.95191957027

Larik i berisi nilai dari 1 hingga jumlah kolom dalam larik x dikurangi 1.

Seperti menghitung luas daerah dibawah kurva, menghitung panjang kurva untuk mendapatkan hasil perhitungan yang mendekati nilai sebenarnya dapat dilakukan dengan memperkecil jarak antar titik pada parabola tersebut. Misalnya kita ganti menjadi 0.01

```
>x=-1:0.01:1; y=x^2; plot2d(x,y);  
>plot2d(x,y,points=1,style="o#",add=1):
```



```
>i=1:cols(x)-1; sum(sqrt((x[i+1]-x[i])^2+(y[i+1]-y[i])^2))
```

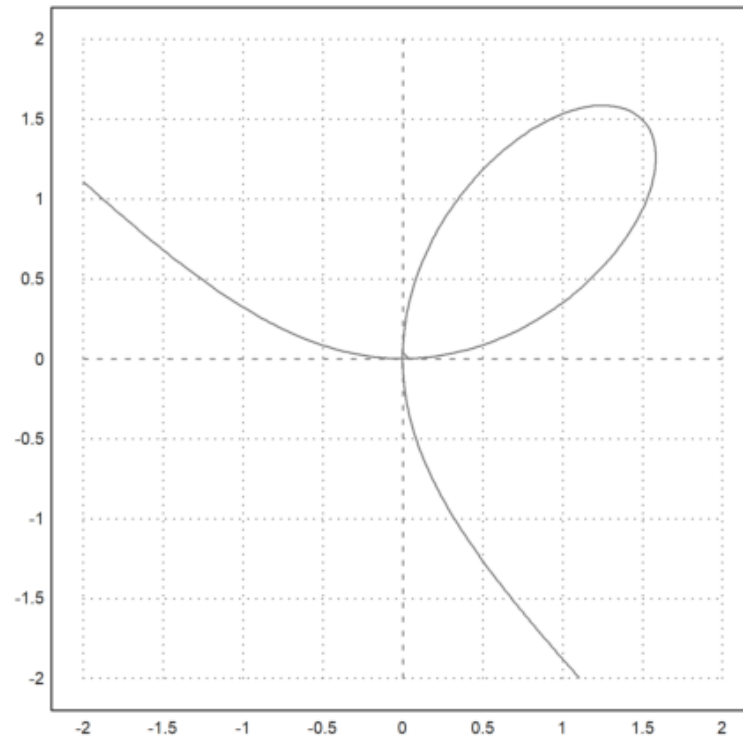
2.95787080795

Menghitung panjang kurva dengan koordinat kartesius. Menghitung kurva dengan cara ini dapat dihitung dengan persamaan implisit.

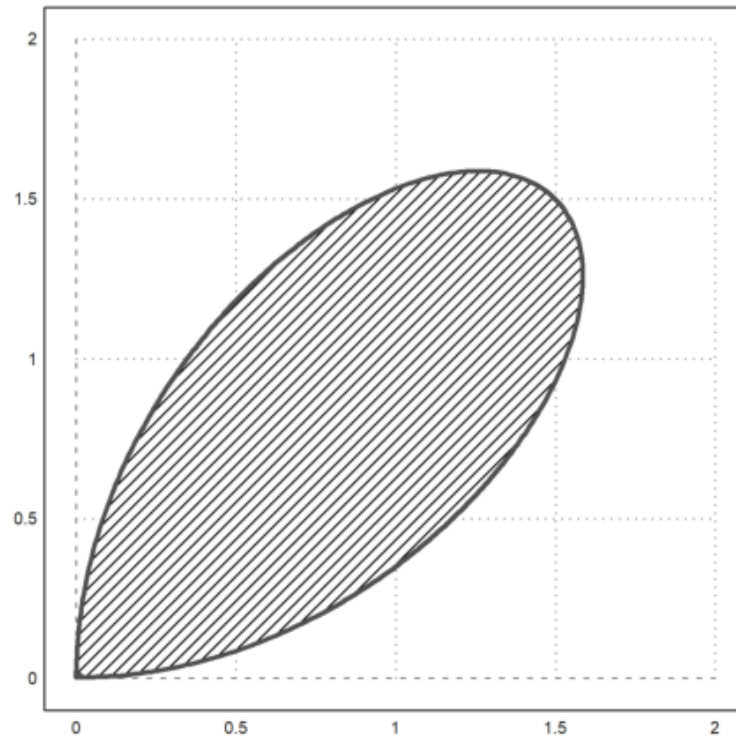
```
>z &= x^3+y^3-3*x*y; $z
```

$$y^3 - 3xy + x^3$$

```
>plot2d(z,r=2,level=0,n=100):
```



```
>plot2d(z,a=0,b=2,c=0,d=2,level=[-10;0],n=100,contourwidth=3,style="/"):
```



Plot diatas merupakan plot dari persamaan z dalam rentang yang lebih terdefinisi secara spesifik. $a=0$ dan $b=2$ menunjukkan rentang untuk sumbu x dari 0 hingga 2. Sedangkan $c=0$ dan $d=2$ menunjukan rentang untuk sumbu y dari 0 hingga 2. Perintah "contourwidht" digunakan untuk mengatur lebar garis kontur dalam plot.

```
>$z with y=1*x, sol &= solve(%,x); $sol
```

$$\left[x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

$$\left[x = \frac{3l}{l^3 + 1}, x = 0 \right]$$

Kita ganti variabel y dalam persamaan z dengan ekspresi 1x. Selanjutnya dihitung solusinya dan hasilnya disimpan dalam variabel sol.

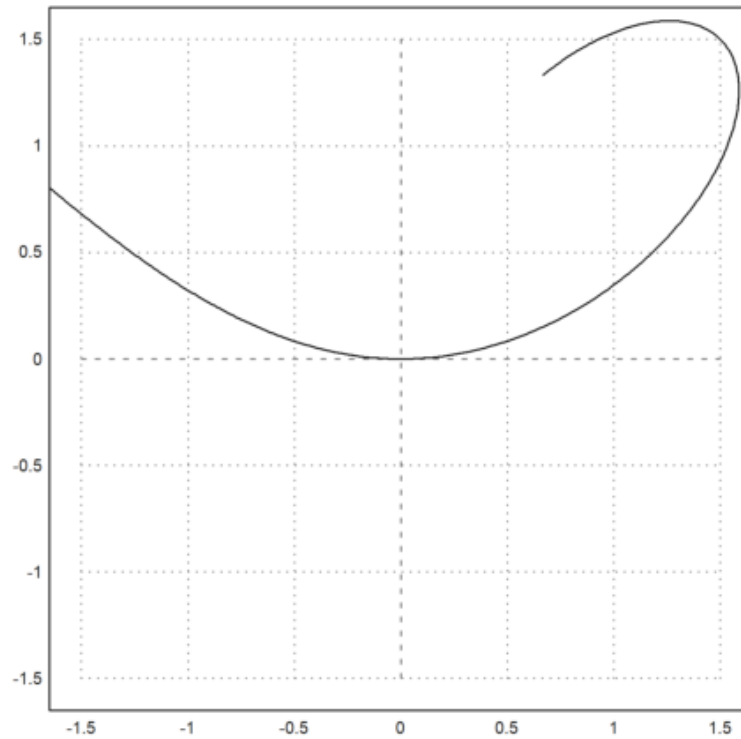
Kita gunakan solusi tersebut untuk mendefinisikan fungsi dengan Maxima.

```
>function f(l) &= rhs(sol[1]); $'f(l)=f(l)
```

$$f(l) = \frac{3l}{l^3 + 1}$$

Fungsi tersebut juga dapat digunakan untuk menggambar kurvanya.

```
>plot2d(&f(x),&x*f(x),xmin=-0.5,xmax=2,a=0,b=2,c=0,d=2,r=1.5):
```



Rumus elemen panjang kurva adalah

$$ds = \sqrt{f'(l)^2 + (lf'(l) + f(l))^2}.$$

```
>function ds(l) &= ratsimp(sqrt(diff(f(l),l)^2+diff(l*f(l),l)^2)); $'ds(l)=ds(l)
```

$$ds(l) = \frac{\sqrt{9l^8 + 36l^6 - 36l^5 - 36l^3 + 36l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4l^9 + 6l^6 + 4l^3 + 1}}$$

```
>$integrate(ds(l),1,0,1)
```

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{9l^8 + 36l^6 - 36l^5 - 36l^3 + 36l^2 + 9}}{\sqrt{l^{12} + 4l^9 + 6l^6 + 4l^3 + 1}} dl$$

Karena integral tersebut tidak dapat dihitung oleh Maxima maka kita harus mneghitungnya dengan metode numerik dengan Euler. Bentuk kurva diatas simetris, sehingga kita dapat menghitungnya dengan mengalikan hasil integrasi dari 0 sampai 1 dengan 2.

```
>2*integrate("ds(x)",0,1)
```

4.91748872168

```
>2*romberg(&ds(x),0,1)
```

4.91748872168

Perhitungan diatas dapat dilakukan untuk sembarang fungsi x dan y dengan mendefinisikan fungsi EMT. Misalkan fungsi tersebut kita beri nama panjangkurva, maka fungsi ini akan selalu memanggil Maxima untuk menurunkan fungsi yang diberikan.

```
>function panjangkurva(fx,fy,a,b) ...
```

```
    ds=mxm("sqrt(diff(@fx,x)^2+diff(@fy,x)^2)");  
    return romberg(ds,a,b);  
endfunction
```

```
>panjangkurva("x","x^2",-1,1)
```

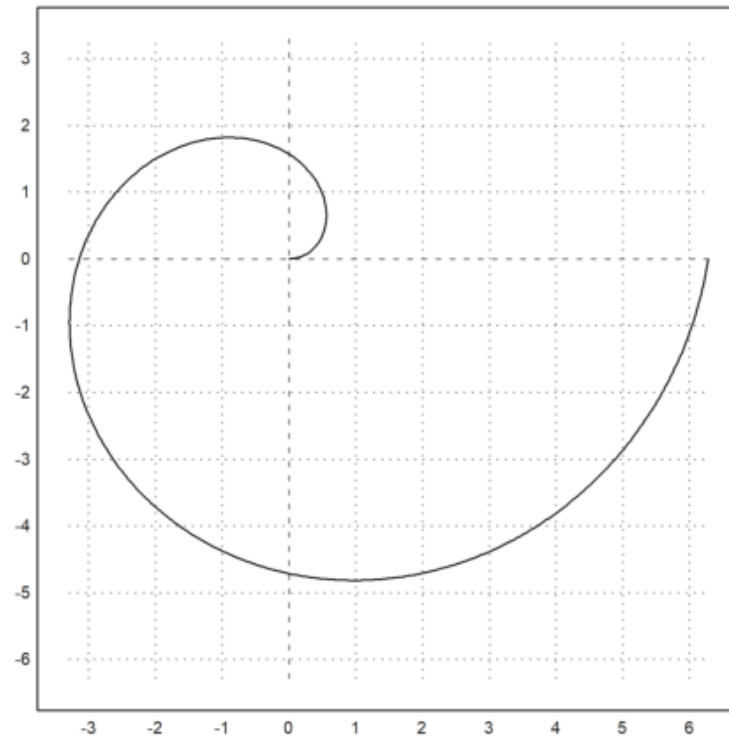
2.95788571509

```
>2*panjangkurva(mxm("f(x)"),mxm("x*f(x)"),0,1)
```

4.91748872168

Selanjutnya kita dapat menghitung panjang spiral Archimides berikut dengan fungsi diatas.

```
>plot2d("x*cos(x)","x*sin(x)",xmin=0,xmax=2*pi,square=1):
```



```
>panjangkurva("x*cos(x)","x*sin(x)",0,2*pi)
```

21.2562941482

```
>&kill(ds,x,fx,fy)
```

done

```
>function ds(fx,fy) &&= sqrt(diff(fx,x)^2+diff(fy,x)^2)
```

$$\sqrt{\text{diff}(fy, x)^2 + \text{diff}(fx, x)^2}$$

```
>sol &= ds(x*cos(x), x*sin(x)); $sol
```

$$\sqrt{(\cos x - x \sin x)^2 + (\sin x + x \cos x)^2}$$

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

21.2562941482

```
>$sol | trigreduce | expand, $integrate(%,x,0,2*pi), %()
```

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

$$\frac{\operatorname{asinh}(2\pi) + 2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1}}{2}$$

21.2562941482

```
>sol &= radcan(ds(3*x^2-1,3*x^3-1)); $sol
```

$$3x\sqrt{9x^2 + 4}$$

```
>$showev('integrate(sol,x,0,1/sqrt(3))), $2*float(%) // panjang kurva di atas
```

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

$$6.0 \int_{0.0}^{0.5773502691896258} x \sqrt{9.0x^2 + 4.0} dx = 2.337835372767141$$

NAMA : DHEA ANGGITA RISKY

NIM : 22301244007

KELAS : PENDIDIKAN MATEMATIKA A 2022

BARISAN DAN DERET ** BARISAN

Barisan adalah rangkaian bilangan atau elemen yang diurutkan dalam

suatu susunan tertentu. Barisan bisa berupa deret bilangan, fungsi-fungsi, atau objek-objek lain yang terkumpul dalam urutan berdasarkan indeks. Secara formal, barisan sering diwakili sebagai $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, di mana $a_1, a_2, a_3, \dots$ adalah elemen-elemen berurutan dalam barisan.

1. BARISAN ARITMATIKA

A. Definisi

Barisan aritmatika adalah urutan atau rangkaian bilangan di mana

setiap angka atau elemen dalam barisan ini memiliki selisih yang tetap dengan angka sebelumnya.

Selisih ini disebut beda aritmatika, dan biasanya digunakan untuk

menghasilkan anggota-anggota berikutnya dalam barisan. Dalam barisan aritmatika, setiap angka (kecuali angka pertama) ditemukan dengan menambahkan beda aritmatika ke angka sebelumnya.

B. Rumus

Rumus umum untuk barisan aritmatika adalah sebagai berikut:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Dimana :

$$a_n$$

adalah anggota ke-n dalam barisan aritmatika.

$$a_1$$

adalah anggota pertama dalam barisan aritmatika.

$$n$$

adalah posisi anggota yang ingin ditentukan.

$$d$$

adalah beda aritmatika (perbedaan yang tetap antara setiap anggota).

C. Contoh

- Contoh Sederhana Barisan Aritmatika dengan Selisih 1

>1:15

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]

>5:75

[5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33,
34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47,
48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61,
62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75]

>13:33

[13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
27, 28, 29, 30, 31, 32, 33]

>2:200

[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200]

- Contoh Sederhana Barisan Aritmatika dengan Selisih tertentu dan memiliki Batasan

>1:3:16

[1, 4, 7, 10, 13, 16]

>2:7:58

[2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58]

```
>5:10:110
```

```
[5, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105]
```

- Contoh Soal Barisan Aritmatika

Sebuah barisan aritmatika memiliki anggota pertama adalah 4 dengan

beda 3. Hitunglah anggota (suku) ke-50 dari barisan tersebut!

```
>function f(n):=4+(n-1)*3  
>f(50)
```

```
151
```

- Contoh Soal cerita sederhana Barisan aritmatika

Anggita ingin menabung setiap bulannya untuk persiapan liburan

dengan temannya. Pada bulan pertama, dia menyimpan Rp 500.000,00. Setiap bulan berikutnya, dia ingin menambahkan Rp 100.000,00 lebih banyak daripada bulan sebelumnya. Berapa total uang yang akan dia simpan setelah 18 bulan?

```
>function f(n):=500000+(n-1)*100000  
>f(18)
```

2200000

2. BARISAN GEOMETRI

A. Definisi

Barisan geometri adalah urutan bilangan di mana setiap angka atau

elemen dalam barisan ini ditemukan dengan mengalikan angka sebelumnya dengan suatu bilangan tetap yang disebut rasio geometri.

Rasio geometri ini digunakan untuk menghasilkan anggota-anggota

berikutnya dalam barisan. Dalam barisan geometri, setiap angka (kecuali angka pertama) ditemukan dengan mengalikan angka sebelumnya dengan rasio geometri.

B. Rumus

Rumus umum untuk barisan geometri adalah

$$a_n = a_1 r^{(n-1)}$$

Dimana:

$$a_n$$

adalah anggota ke-n dalam barisan geometri.

$$a_1$$

adalah anggota pertama dalam barisan geometri.

$$r$$

adalah rasio geometri (perbandingan tetap antara setiap anggota

dalam barisan).

$$n$$

adalah posisi anggota yang ingin ditemukan.

C.Contoh

- Contoh Sederhana Barisan Geometri

Tentukan nilai suku barisan geometri dari suku ke-1 sampai ke-10,

jika diketahui suku pertama adalah 4, dengan rasio 2!

```
>a1:=4
```

```
4
```

```
>r:=2
```

```
2
```

```
>n:=(1:10)
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]
```

```
>function f(n):= a1*r^(n-1)  
>f(n)
```

[4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048]

- Contoh Soal cerita sederhana barisan Geometri

1. Aisyah memiliki satu kotak berisi permen. Setiap hari, dia

membagi permen di dalam kotak itu menjadi dua, kemudian menambahkan satu permen lagi ke dalam kotak. Pada hari pertama, dia memiliki 4 permen dalam kotak. Berapa banyak permen yang akan ada dalam kotak Aisyah pada hari ke-5?

```
>a1:=4
```

4

```
>r:=2
```

2

```
>n:=(5)
```

5

```
>function f(n):=a1*r^(n-1)
>f(5)
```

64

2. Afa adalah seorang kolektor mainan langka. Setiap bulan, dia

menambahkan sebuah mainan langka baru ke koleksinya. Awalnya, koleksinya hanya memiliki satu mainan langka yang dia beli seharga Rp 200.000,00. Afa memutuskan untuk terus menambahkan mainan baru setiap bulan dengan rasio pertumbuhan harga sebesar 10 %. Dia ingin mengetahui berapa harga mainan langka yang akan menjadi mainan ke-6 dalam koleksinya.

```
>a1:=200000
```

200000

```
>r:=(110/100)
```

1.1

```
>function f(n):= a1*r^(n-1)
>f(6)
```

A. DEFINISI

Dalam ilmu matematika, iterasi dapat diartikan sebagai proses atau metode yang digunakan secara berulang-ulang (pengulangan) dalam menyelesaikan permasalahan matematik.

B. CONTOH SOAL

1. Pertumbuhan penduduk dari nilai awal 1000 dengan laju

pertambahan 5%, selama 6 tahun.

```
>r=1.05; iterate("x*r",1000,n=6)
```

```
[1000, 1050, 1102.5, 1157.63, 1215.51, 1276.28, 1340.1]
```

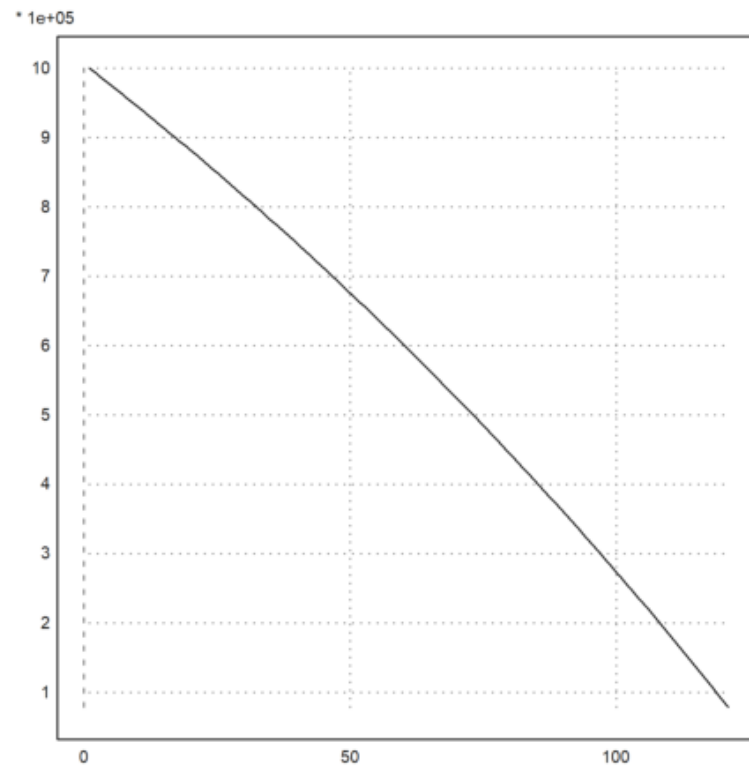
2. Bahaya menabung di bank pada masa sekarang! Dengan bunga

tabungan sebesar 6% per tahun atau 0.5% per bulan dipotong pajak 20%, dan biaya administrasi 10000 per bulan,
jika memiliki tabungan sebesar 1 juta tanpa diambil selama sekitar 10 tahunan akan habis diambil oleh bank!

```
>r=0.005; iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=120)
```

```
[1e+06, 994000, 987976, 981928, 975856, 969759, 963638, 957493,  
951323, 945128, 938908, 932664, 926395, 920100, 913781, 907436,  
901066, 894670, 888248, 881801, 875329, 868830, 862305, 855755,  
849178, 842574, 835945, 829288, 822605, 815896, 809159, 802396,  
795606, 788788, 781943, 775071, 768171, 761244, 754289, 747306,  
740295, 733257, 726190, 719094, 711971, 704819, 697638, 690428,  
683190, 675923, 668627, 661301, 653946, 646562, 639148, 631705,  
624232, 616729, 609196, 601632, 594039, 586415, 578761, 571076,  
563360, 555614, 547836, 540027, 532187, 524316, 516413, 508479,  
500513, 492515, 484485, 476423, 468329, 460202, 452043, 443851,  
435626, 427369, 419078, 410755, 402398, 394007, 385583, 377126,  
368634, 360109, 351549, 342955, 334327, 325665, 316967, 308235,  
299468, 290666, 281829, 272956, 264048, 255104, 246124, 237109,  
228057, 218969, 209845, 200685, 191487, 182253, 172982, 163674,  
154329, 144946, 135526, 126068, 116573, 107039, 97467, 87856.8,  
78208.2]
```

```
>r=0.005; plot2d(iterate("(1+0.8*r)*x-10000",1000000,n=120)):
```



sintax untuk mencari minimal tabungan setiap bulannya agar tidak habis diambil oleh bank:

```
>$solve(0.8*r*A-a,A), $% with [r=0.005, a=10]
```

Masih terkait dengan contoh soal ke-2, kemudian akan ditampilkan fungsi untuk menghitung saldo tabungan dan kemudian dilakukan iterasi.

```
>function saldo(x,r,a) := round((1+0.8*r)*x-a,2);  
>iterate({{"saldo",0.005,10}},1000,n=5)
```

```
[1000, 994, 987.98, 981.93, 975.86, 969.76]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},2000,n=7)
```

```
[2000, 1998, 1995.99, 1993.97, 1991.95, 1989.92, 1987.88,  
1985.83]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},21000,n=9)
```

```
[21000, 21074, 21148.3, 21222.9, 21297.8, 21373, 21448.5,  
21524.3, 21600.3, 21676.8]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},23000,n=7)
```

```
[23000, 23082, 23164.3, 23247, 23330, 23413.3, 23497, 23580.9]
```

```
>iterate({{"saldo",0.005,10}},25000,n=7)
```

```
[25000, 25090, 25180.4, 25271.1, 25362.2, 25453.6, 25545.4,  
25637.6]
```

BARISAN FIBONACCI

A. DEFINISI

Barisan Fibonacci adalah susunan angka dengan nilai angka

berikutnya diperoleh dari hasil mmenambahkan kedua angka sebelumnya secara berturut-turut.

Barisan Fibonacci termasuk barisan yang kompleks yang bisa

menggunakan fungsi "sequence()". Fungsi "sequence()" digunakan untuk menghitung nilai-nilai $x[n]$ dari semua nilai sebelumnya, $x[1], \dots, x[n-1]$ yang diketahui.

B. CONTOH

- Barisan Fibonacci

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_1 = 1, x_2 = 1$$

pengaplikasian dalam EMT

```
>sequence("x[n-1]+x[n-2]", [1,1],13)
```

```
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233]
```

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, x_1 = 9, x_2 = 12$$

pengaplikasian dalam EMT

```
>sequence("x[n-1]+x[n-1]", [9,12],17)
```

```
[9, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144, 12288,
24576, 49152, 98304, 196608, 393216]
```

C. SIFAT MENARIK BARISAN FIBONACCI

Sifat menariknya yaitu akar pangkat ke-n suku ke-n akan konvergen

ke pecahan emas.
Contohnya yaitu :

```
>$(1+sqrt(5))/2=float((1+sqrt(5))/2)
```

$$\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.618033988749895$$

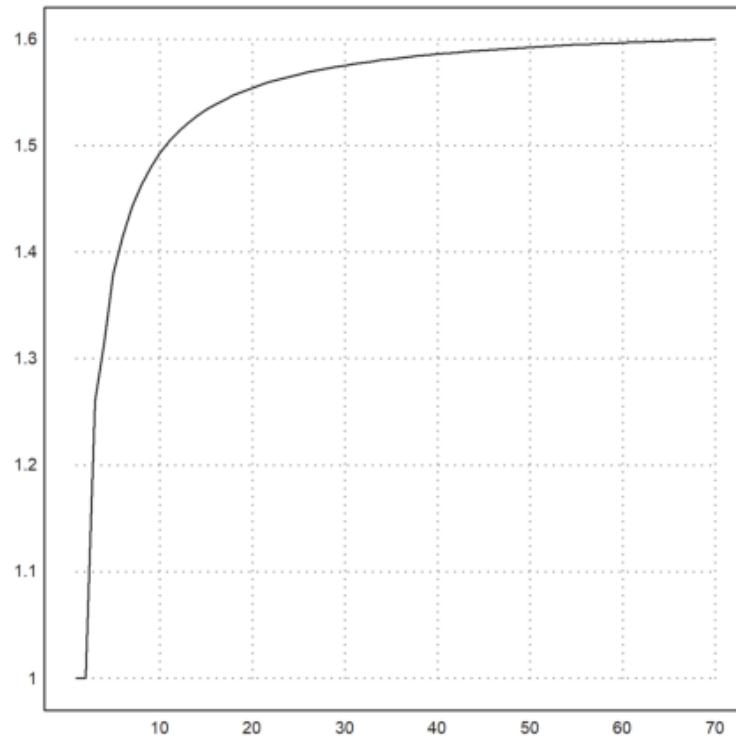
```
>$(2+sqrt(6))/2=float((2+sqrt(6))/2)
```

$$\frac{\sqrt{6} + 2}{2} = 2.224744871391589$$

```
>$(15+sqrt(14))/2=float((15+sqrt(14))/2)
```

$$\frac{\sqrt{14} + 15}{2} = 9.37082869338697$$

```
>plot2d(sequence("x[n-1]+x[n-2]", [1,1],70)^(1/(1:70))):
```



Dalam Baris Fibonacci terdapat yang namanya Rekursi. Rekursi

berfungsi untuk mendefinisikan urutan atau deret matematika dengan cara yang berulang ata belaku untuk nilai yang lebih kecil. Rekursi dapat dilakukan dengan menggunakan rumus yang tergantung pada semua elemen sebelumnya.

Contohnya elemen ke-n merupakan jumlah (n-1) elemen sebelumnya, dimulai dengan 1 (elemen ke-1). Jelas, nilai elemen ke-n adalah $2^{(n-2)}$.

```
>sequence("sum(x)",1,12)
```

```
[1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024]
```

CONTOH LAIN

```
>sequence("sum(x)",6,10)
```

```
[6, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536]
```

```
>sequence("sum(x)",-4,9)
```

```
[-4, -4, -8, -16, -32, -64, -128, -256, -512]
```

```
>sequence("sum(x)",-9,15)
```

[-9, -9, -18, -36, -72, -144, -288, -576, -1152, -2304,
-4608, -9216, -18432, -36864, -73728]

Selain menggunakan ekspresi dalam x dan n, kita juga dapat menggunakan fungsi.
Pada contoh berikut, digunakan iterasi

$$x_n = A \cdot x_{n-1},$$

dengan A suatu matriks 2x2, dan setiap x[n] merupakan matriks/vektor 2x1.

```
>A=[1,1;1,2]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]  
>sequence("suku",[1;1],4)
```

1	2	5	13
1	3	8	21

Selain itu juga bisa dengan fungsi perpangkatan matriks "matrixpower()". Cara ini lebih cepat, karena hanya menggunakan perkalian matriks sebanyak $\log_2(n)$.

$$x_n = A.x_{n-1} = A^2.x_{n-2} = A^3.x_{n-3} = \dots = A^{n-1}.x_1$$

```
>sequence("matrixpower(A,n).[1;1]",1,4)
```

1	5	13	34
1	8	21	55

CONTOH LAIN

```
>A=[3,7;7,3]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]  
>sequence("suku",[1,7;4,2],5)
```

1	7	35	490	4340
4	2	55	410	4660

```
>A=[1,2;7,5]; function suku(x,n) := A.x[,n-1]  
>sequence("suku",[5;7],5)
```

5	19	159	1125	8181
7	70	483	3528	25515

SPIRAL TEODORUS

Spiral Theodorus merupakan spiral diskrit yang dibangun dari

beberapa segitiga siku-siku dengan cara menghubungkan sisi miring segitiga siku-siku dengan alas dari segitiga siku-siku lainnya

Spiral Theodorus (spiral segitiga siku-siku) dapat digambar secara

rekursif. Rumus rekursifnya adalah:

$$x_n = \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n-1}}\right) x_{n-1}, \quad x_1 = 1,$$

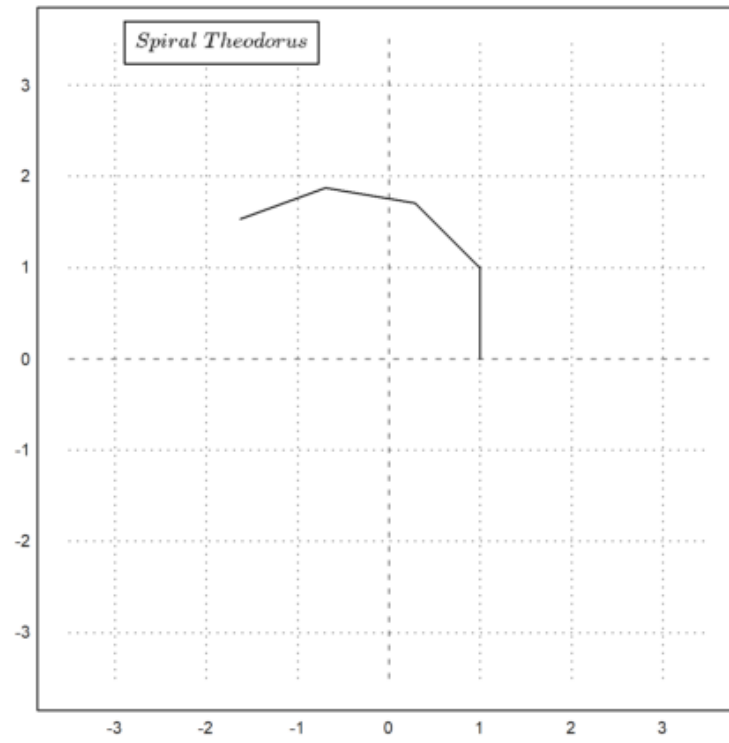
```
>function g(n) := 1+I/sqrt(n)
```

Rekursinya dapat dijalankan sebanyak n untuk menghasilkan barisan n bilangan kompleks, kemudian digambar bilangan-bilangan kompleksnya

CONTOH :

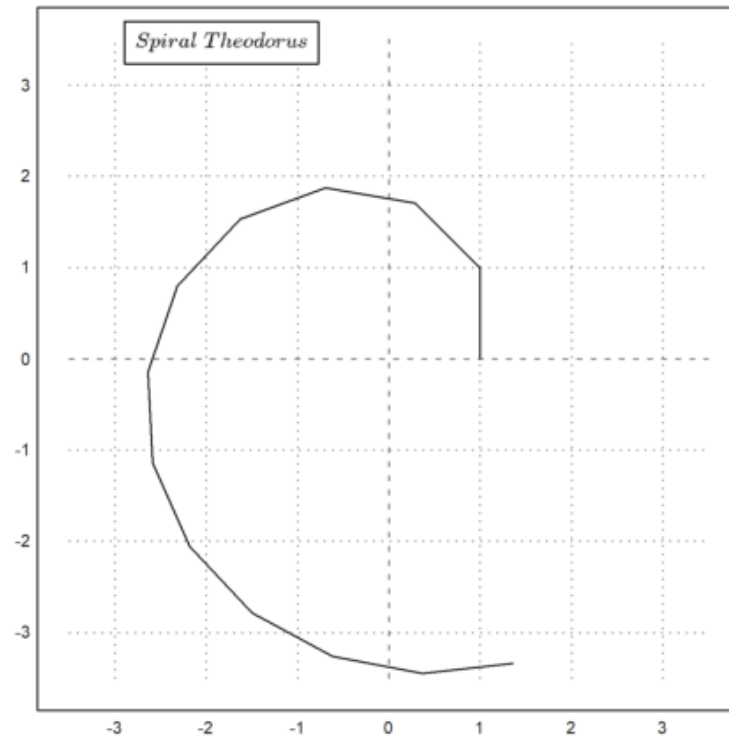
1. Untuk $n=5$

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,5); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```



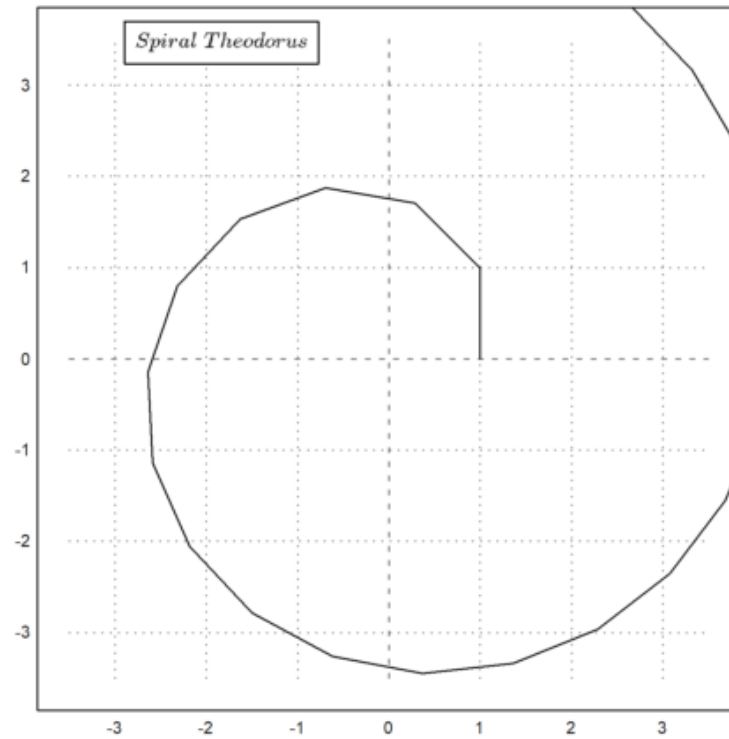
2. Untuk $n=13$

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,13); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```



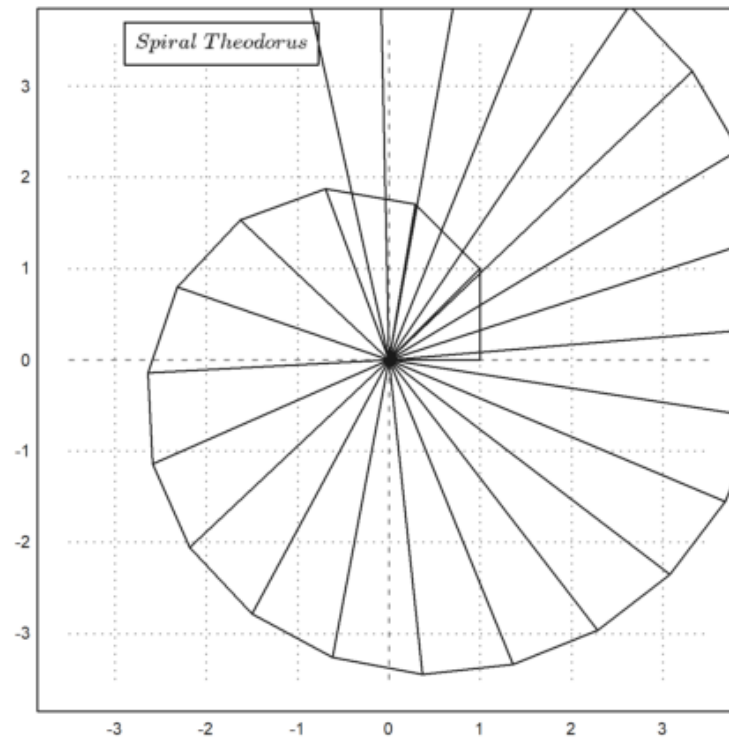
3. Untuk $n=26$

```
>x=sequence("g(n-1)*x[n-1]",1,26); plot2d(x,r=3.5); textbox(latex("Spiral\ Theodorus"),0.4):
```



Selanjutnya titik-titik kompleks dari barisan yang sudah ditampilkan pada plot akan dihubungkan ke titik 0 menggunakan loop.

```
>for i=1:cols(x); plot2d([0,x[i]],>add); end:
```



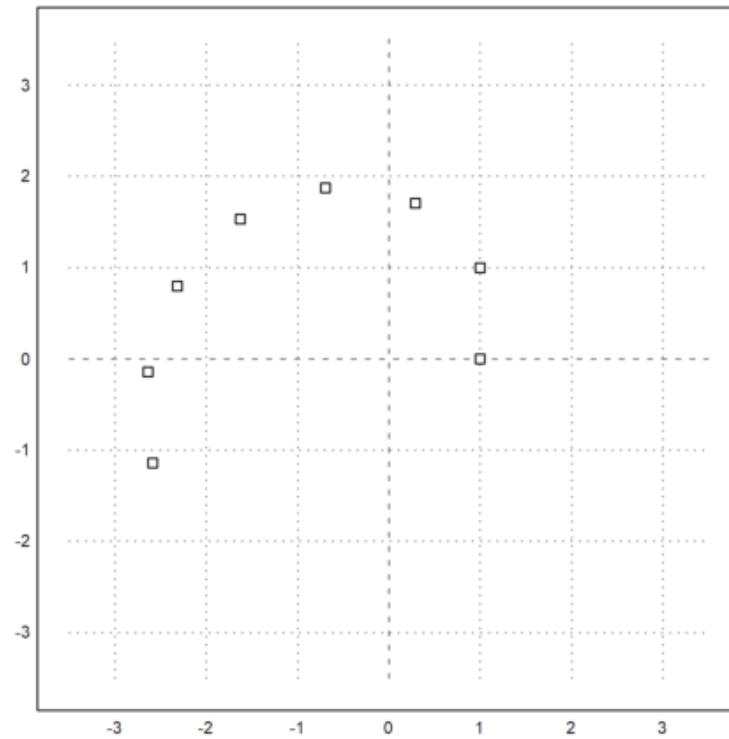
Spiral tersebut juga dapat didefinisikan menggunakan fungsi rekursif, yang tidak memerlukan indeks dan bilangan kompleks. Dalam hal ini digunakan vektor kolom pada bidang.

```
>function gstep (v) ...
```

```
    w=[-v[2];v[1]];
    return v+w/norm(w);
endfunction
```

Jika dilakukan iterasi 7 kali dimulai dari $[1;0]$ akan didapatkan matriks yang memuat vektor-vektor dari setiap iterasi

```
>x=iterate("gstep",[1;0],7); plot2d(x[1],x[2],r=3.5,>points):
```



Nama : Amelia Nur Rahma W
NIM : 22301241012
Prodi : Pendidikan Matematika A 2022

Definisi Deret

Deret adalah rangkaian atau barisan suku-suku bilangan yang dijumlahkan satu per satu sesuai dengan suatu aturan atau pola tertentu. Deret dapat berupa rangkaian bilangan riil, bilangan bulat, bilangan kompleks, atau bahkan fungsi matematika.

Secara umum, suku-suku dalam deret dinotasikan sebagai

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Deret terdiri dari deret berhingga dan deret tak hingga

Deret Berhingga

Deret tak hingga adalah konsep dalam matematika yang mengacu pada penjumlahan suku-suku berhingga dari suatu deret numerik. Deret ini terdiri dari suku-suku yang membentuk rangkaian berhingga yang terbatas. Definisi formalnya adalah sebagai berikut.

Sebuah deret berhingga adalah rangkaian berhingga suku

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

yang dijumlahkan untuk membentuk jumlah yang berhingga. Deret ini biasanya dinyatakan sebagai

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Di mana S adalah jumlah dari deret berhingga tersebut.

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Perintah tersebut digunakan untuk menghitung jumlah dari deret berhingga

$$\sum_{k=n}^n k$$

yang dimulai dari $k=n$ hingga n yang ditentukan, dan kemudian mencoba untuk menyederhanakan hasilnya secara simbolik dengan menggunakan perintah `ev` dan opsi `simpsum=true`.

`sum(a, k, n, n)`: Ini adalah ekspresi yang digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga

$$\sum_{k=n}^n k$$

dengan k sebagai variabel indeks, dimulai dari $k=n$ hingga n yang ditentukan. Ini adalah notasi umum untuk menggambarkan deret berhingga yang dimulai dari $k=n$ hingga n yang ditentukan.

`=:` Ini adalah operator yang digunakan untuk menetapkan hasil perhitungan di sebelah kiri kepada ekspresi di sebelah kanan. Dalam hal ini, pernyataan ini mengatakan bahwa hasil dari perhitungan deret sebelah kiri harus sama dengan hasil dari perhitungan deret sebelah kanan.

`factor(...)` Ini adalah fungsi yang digunakan untuk memfaktorkan ekspresi matematika. Dalam konteks ini, hasil dari jumlah deret difaktorkan.

`ev(...)` Ini adalah perintah dalam bahasa yang digunakan untuk mengevaluasi (menghitung) ekspresi matematika.

`simpsum=true` Ini adalah opsi yang digunakan bersamaan dengan perintah `ev` untuk memberitahu bahwa Anda ingin mencoba menyederhanakan hasil perhitungan deret secara simbolik jika memungkinkan. Dengan kata lain, opsi ini menginstruksikan untuk melakukan penyederhanaan pada hasil deret.

Macam-Macam Deret Berhingga

1. Deret Aritmatika

Deret dengan suku-suku yang memiliki beda tetap antara setiap dua suku berturut-turut.

Rumus deret aritmatika

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Berikut ini contoh perintah yang digunakan dalam deret aritmatika untuk beda b=1

```
>$'sum(k, k, 1, 5) = factor(ev(sum(k, k, 1, 5),simpsum=true))// simpsum:menghitung deret secara simb
```

$$\sum_{k=1}^5 k = 15$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga

$$\sum_{k=1}^5 k$$

Deret tersebut adalah deret aritmatika dengan suku awal k=1
dan beda b=1. Deret aritmatika ini memiliki susku-suku

1+2+3+...+5

yang dimulai dari k=1 hingga 5. Hasil dari perhitungan deret aritmatika tersebut adalah 15.

```
>$'sum(k, k, 5, 25) = factor(ev(sum(k, k, 5, 25),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret secara s
```

$$\sum_{k=5}^{25} k = 315$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga

$$\sum_{k=5}^{25} k$$

Deret tersebut adalah deret aritmatika dengan suku awal $k=5$ dan beda $b=1$. Deret aritmatika ini memiliki susku-suku

$$5+6+\dots+25$$

yang dimulai dari $k=5$ hingga 25. Hasil dari perhitungan deret aritmatika tersebut adalah 315.

```
>$'sum(k, k, 10, 115) = factor(ev(sum(k, k, 10, 115),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=10}^{115} k = 6625$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga

$$\sum_{k=10}^{115} k$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal k=10

dan beda b=1. Deret geometri ini memiliki susku-suku

10+11+...+115

yang dimulai dari k=10 hingga 115. Hasil dari perhitungan deret geometri tersebut adalah 6.625.

Berikut ini adalah perintah yang digunakan untuk menghitung deret aritmatika dengan beda tidak sama dengan 1

```
>$'sum(a+(n-1)*b, n, 1, 5) = factor(ev(sum(4+(n-1)*8, n, 1, 5),simpsum=true))
```

$$\sum_{n=1}^5 (b(n-1) + a) = 100$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 5 suku

$$\sum_{k=4}^n k$$

Deret tersebut adalah deret aritmatika dengan suku awal k=4

dan beda b=8. Deret geometri ini memiliki 5 suku yang dimulai dari k=4 hingga suku ke-5 nya. Hasil dari perhitungan deret aritmatika tersebut adalah 100.

```
>$'sum(a+(n-1)*b, n, 1, 15) = factor(ev(sum(3+(n-1)*2, n, 1, 15),simpsum=true))
```

$$\sum_{n=1}^{15} (b(n-1) + a) = 255$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 15 suku

$$\sum_{k=3}^n k$$

Deret tersebut adalah deret aritmatika dengan suku awal $k=3$ dan beda $b=2$. Deret geometri ini memiliki 15 suku yang dimulai dari $k=3$ hingga suku ke-15 nya. Hasil dari perhitungan deret aritmatika tersebut adalah 255.

2. Deret Geometri

Deret dengan suku-suku yang memiliki rasio tetap antara setiap dua suku berturut-turut.

Untuk $r < 1$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Untuk $r > 1$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

```
>$'sum(a*r^(n-1), n, 1, 3) = factor(ev(sum(2*2^(n-1), n, 1, 3),simpsum=true))
```

$$a \sum_{n=1}^3 r^{n-1} = 14$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 3 suku

$$\sum_{n=3}^n (2(2^{(n-1)}))$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal $n=2$ dan rasio $r=2$. Deret geometri ini memiliki 3 suku yang dimulai dari $n=2$ hingga suku ke-3 nya. Hasil dari perhitungan deret geometri tersebut adalah 14.

```
>$'sum(a*r^(n-1), n, 1, 2) = factor(ev(sum(8*10^(n-1), n, 1, 2),simpsum=true))
```

$$a \sum_{n=1}^2 r^{n-1} = 88$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 2 suku

$$\sum_{n=8}^n (8(10^{(n-1)}))$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal $n=8$ dan rasio $r=10$. Deret geometri ini memiliki 2 suku yang dimulai dari $n=2$ hingga suku ke-2 nya. Hasil dari perhitungan deret geometri tersebut adalah 88.

```
>$'sum(a*r^(n-1), n, 1, 3) = factor(ev(sum(4*2^(n-1), n, 1, 3),simpsum=true))
```

$$a \sum_{n=1}^3 r^{n-1} = 28$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 3 suku

$$\sum_{n=1}^3 (4(2^{(n-1)}))$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal $a=4$ dan rasio $r=2$. Deret geometri ini memiliki 3 suku yang dimulai dari $a=4$ hingga suku ke-3 nya. Hasil dari perhitungan deret geometri tersebut adalah 28.

```
>$'sum(a*r^(n-1), n, 1, 10) = factor(ev(sum(1*2^(n-1), n, 1, 10),simpsum=true))
```

$$a \sum_{n=1}^{10} r^{n-1} = 1023$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret berhingga sebanyak 10 suku

$$\sum_{n=1}^6 (1(2^{(n-1)}))$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal $a=1$ dan rasio $r=2$. Deret geometri ini memiliki 10 suku yang dimulai dari $a=1$ hingga suku ke-10 nya. Hasil dari perhitungan deret geometri tersebut adalah 28.

3. Deret Eksponensial

Deret yang memiliki suku-suku yang didefinisikan oleh fungsi eksponensial

$$e^x$$

```
>$'sum(x^k, k, n, n) = factor(ev(sum(x^k, k, n, n),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=n}^n x^k = x^n$$

Perintah tersebut adalah perintah yang digunakan untuk menghitung jumlah suku dalam deret matematika yang berbentuk eksponensial

$$x^k$$

dengan k awal hingga k=n. Sehingga bentuk deretnya adalah

$$x^{n_1} + \dots + x^n$$

```
>$'sum(x^k, k, 0, 3) = factor(ev(sum(x^k, k, 0, 3),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^3 x^k = (x+1) (x^2+1)$$

bentuk lain

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3$$

```
>$'sum(x^k, k, 0, 3) = factor(ev(sum(2^k, k, 0, 3),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^3 x^k = 15$$

Perintah tersebut adalah perintah yang digunakan untuk menghitung jumlah suku dalam deret matematika yang berbentuk eksponensial

$$2^0 + \dots + 2^3$$

dengan k=0 hingga k=3. Sehingga hasil perhitungan dari suku-sukunya adalah 15

```
>$'sum(x^k, k, 2, 5) = factor(ev(sum(x^k, k, 2, 5),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=2}^5 x^k = x^2 (x + 1) (x^2 + 1)$$

bentuk lain

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

```
>$'sum(x^k, k, 2, 5) = factor(ev(sum(3^k, k, 2, 5),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=2}^5 x^k = 360$$

Perintah tersebut adalah perintah yang digunakan untuk menghitung jumlah suku dalam deret matematika yang berbentuk eksponensial

$$3^2 + \dots + 3^5$$

dengan k=2 hingga k=5. Sehingga hasil perhitungan dari suku-sukunya adalah 360

```
>$'sum(x^k, k, 3, 6) = factor(ev(sum(3^k, k, 3, 6),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=3}^6 x^k = 1080$$

Perintah tersebut adalah perintah yang digunakan untuk menghitung jumlah suku dalam deret matematika yang berbentuk eksponensial

$$3^3 + \dots + 3^6$$

dengan $k=3$ hingga $k=6$. Sehingga hasil perhitungan dari suku-sukunya adalah 1080

Deret Tak Hingga

Deret tak hingga adalah konsep dalam matematika yang mengacu pada penjumlahan suku-suku tak terhingga dari suatu deret numerik. Deret ini terdiri dari suku-suku yang membentuk rangkaian tak terhingga yang bisa berlanjut tanpa batas. Definisi formalnya adalah sebagai berikut.

Sebuah deret tak hingga adalah rangkaian tak terhingga suku

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

yang dijumlahkan untuk membentuk jumlah tak terhingga. Deret ini biasanya dinyatakan sebagai

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Di mana S adalah jumlah dari deret tak hingga tersebut.

Penting untuk diingat bahwa dalam matematika, untuk mengklasifikasikan deret tak hingga sebagai konvergen (mempunyai jumlah terhingga) atau divergen (mempunyai jumlah tak terhingga), kita perlu memeriksa perilaku suku-suku deret ini ketika jumlahnya mendekati tak terhingga (yaitu, ketika n mendekati tak terhingga). Terdapat berbagai metode dan kriteria yang digunakan untuk menentukan apakah deret tak hingga tertentu konvergen atau divergen.

```
>$'sum(k, k , n , inf)
```

$$\sum_{k=n}^{\infty} k$$

Perintah tersebut digunakan untuk menghitung jumlah dari deret tak hingga

$$\sum_{k=n}^{\infty} k$$

yang dimulai dari $x=n$ hingga tak terhingga, dan kemudian mencoba untuk menyederhanakan hasilnya secara simbolik dengan menggunakan perintah `ev` dan opsi `simplsum=true`.

`sum(k, k, n, inf)`: Ini adalah ekspresi yang digunakan untuk menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{k=n}^{\infty} k$$

dengan x sebagai variabel indeks, dimulai dari $x=n$ hingga tak terhingga(`inf`). Ini adalah notasi umum untuk menggambarkan deret tak hingga yang dimulai dari n hingga tak terhingga.

`=:` Ini adalah operator yang digunakan untuk menetapkan hasil perhitungan di sebelah kiri kepada ekspresi di sebelah kanan. Dalam hal ini, pernyataan ini mengatakan bahwa hasil dari perhitungan deret sebelah kiri harus sama dengan hasil dari perhitungan deret sebelah kanan.

`ev(...)`: Ini adalah perintah dalam bahasa yang digunakan untuk mengevaluasi (menghitung) ekspresi matematika.

`simplsum=true`: Ini adalah opsi yang digunakan bersamaan dengan perintah `ev` untuk memberitahu bahwa Anda ingin mencoba menyederhanakan hasil perhitungan deret secara simbolik jika memungkinkan. Dengan kata lain, opsi ini menginstruksikan untuk melakukan penyederhanaan pada hasil deret.

Macam-Macam Deret Tak Hingga

1. Deret Geometri

Deret dengan suku-suku yang memiliki rasio tetap antara setiap dua suku berturut-turut.

```
>$'sum(1/2^k, k, 1, inf)= ev(sum(1/2^k, k, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal $a=1$ dan rasio

$$r = \frac{1}{2}$$

Deret geometri ini memiliki susku-suku

$$\frac{1}{2^k}$$

yang dimulai dari k=1 hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah 1, karena itu adalah jumlah dari deret geometri yang mendekati setengah dari 1 ketika tak terhingga.

```
>$'sum(1/5^x, x, 2, inf)= ev(sum(1/5^x, x, 2, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{5^x} = \frac{1}{20}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{2^x}$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal

$$a = \frac{1}{5^2}$$

(karena dimulai dari x=2)
dan rasio

$$r = \frac{1}{5}$$

Deret geometri ini memiliki suku-suku

$$\frac{1}{5^x}$$

yang dimulai dari $x=2$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{1}{20}$$

karena itu adalah jumlah dari deret geometri yang mendekati setengah dari

$$\frac{1}{20}$$

ketika tak terhingga.

```
>$'sum(1/2^x, x, 3, inf)= ev(sum(1/2^x, x, 3, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{4}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^x}$$

Deret tersebut adalah deret geometri dengan suku awal

$$a = \frac{1}{2^3}$$

(karena dimulai dari $x=2$)
dan rasio

$$r = \frac{1}{2}$$

Deret geometri ini memiliki suku-suku

$$\frac{1}{2^x}$$

yang dimulai dari $x=2$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{1}{4}$$

karena itu adalah jumlah dari deret geometri yang mendekati setengah dari

$$\frac{1}{4}$$

ketika tak terhingga.

2. Deret Harmonik

Deret dengan suku-suku yang memiliki bentuk

$$\frac{1}{x^2}$$

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

Deret tersebut adalah deret harmonik dengan suku awal $a=1$ dan rasio yang tidak konstan. Deret harmonik ini memiliki suku-suku

$$\frac{1}{x^2}$$

yang dimulai dari $x=1$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
>$'sum(1/x^2, x, 2, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 2, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

Deret tersebut adalah deret harmonik dengan suku awal

$$a = \frac{1}{4}$$

dan rasio yang tidak konstan. Deret harmonik ini memiliki susku-suku

$$\frac{1}{x^2}$$

yang dimulai dari $x=2$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{\pi^2}{6} - 1$$

```
>$'sum(1/x^2, x, 3, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 3, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspresi
```

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

Deret tersebut adalah deret harmonik dengan suku awal

$$a = \frac{1}{9}$$

dan rasio yang tidak konstan. Deret harmonik ini memiliki susku-suku

$$\frac{1}{x^2}$$

yang dimulai dari $x=3$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

3. Deret Eksponensial

Deret yang memiliki suku-suku yang didefinisikan oleh fungsi eksponensial

$$e^x$$

```
>$'sum(exp(-x), x, 1, inf) = ev(sum(exp(-x), x, 1, inf), simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspr
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{-x} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{-x}$$

Deret tersebut adalah deret eksponensial dengan suku awal

$$a = e^{-1}$$

dan rasio

$$a = e^{-1}$$

yang dimulai dari $x=1$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

```
>$'sum(exp(-2*x), x, 1, inf) = ev(sum(exp(-2*x), x, 1, inf), simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{-2x} = \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{-2x}$$

Deret tersebut adalah deret eksponensial dengan suku awal

$$a = e^{-2}$$

dan rasio

$$a = e^{-2}$$

yang dimulai dari $x=1$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

```
>$'sum(exp(-x), x, 2, inf) = ev(sum(exp(-x), x, 2, inf), simpsum=true) // ev: menghitung nilai ekspr
```

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{-x} = \frac{e^{-2}}{1 - e^{-1}}$$

Perintah tersebut menghitung jumlah deret tak hingga

$$\sum_{x=2}^{\infty} e^{-x}$$

Deret tersebut adalah deret eksponensial dengan suku awal

$$a = e^{-2}$$

dan rasio

$$a = e^{-1}$$

yang dimulai dari $x=2$ hingga tak terhingga. Hasil dari perhitungan tersebut adalah

$$\frac{e^{-2}}{1 - e^{-1}}$$

4. Deret Taylor

Deret Taylor adalah deret tak hingga yang terdiri dari suku-suku berurutan. Deret ini digunakan untuk mendekati fungsi matematis dengan menggunakan suku-suku deret. Deret Taylor umumnya digunakan untuk melakukan ekspansi fungsi di sekitar suatu titik tertentu dalam bentuk deret tak hingga. Deret Taylor digunakan untuk menentukan nilai hampiran dari fungsi dalam bentuk polinom.

Deret Taylor dari suatu fungsi $f(x)$ di sekitar titik a memiliki bentuk umum seperti berikut:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

Setiap suku dalam deret Taylor ini bergantung pada turunan fungsi $f(x)$ di titik a . Deret Taylor dapat digunakan untuk mendekati nilai fungsi $f(x)$ di sekitar titik a . Semakin banyak suku yang digunakan dalam deret Taylor, semakin akurat pendekatannya.

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar $x=a$ adalah:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'f(sin(x)) =taylor(sin(x), x, 0, 6) // deret Taylor f(sin(x)) di sekitar x=0, sampai orde ke-6
```

$$f(\sin x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$$

Perintah ini adalah contoh penggunaan deret Taylor untuk mendekati fungsi $f(\cos(x))$ di sekitar

$$x = \pi$$

hingga orde 6. Ini akan menghasilkan deret Taylor dari $f(\cos(x))$ yang mencakup suku-suku hingga orde 6. Hasil dari perintah ini adalah deret Taylor dari $f(\cos(x))$. Deret ini dapat digunakan untuk mendekati nilai fungsi di sekitar

$$x = \pi$$

dengan tingkat keakuratan yang diinginkan.

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai orde ke-10
```

$$e^x = \frac{x^{10}}{3628800} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

Perintah ini adalah contoh penggunaan deret Taylor untuk mendekati fungsi eksponensial

$$e^x$$

di sekitar $x=0$ hingga orde 10. Ini akan menghasilkan deret Taylor dari

$$e^x$$

yang mencakup suku-suku hingga orde 10. Hasil dari perintah ini adalah deret Taylor dari

$$e^x$$

Deret ini dapat digunakan untuk mendekati nilai fungsi di sekitar $x=0$ dengan tingkat keakuratan yang diinginkan.

```
>$'log(x) =taylor(log(x), x, 1, 10) // deret Taylor log(x) di sekitar x=1, sampai orde ke-10
```

$$\log x = x - \frac{(x-1)^{10}}{10} + \frac{(x-1)^9}{9} - \frac{(x-1)^8}{8} + \frac{(x-1)^7}{7} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^2}{2} - 1$$

Perintah ini adalah contoh penggunaan deret Taylor untuk mendekati fungsi logaritma $\log(x)$ di sekitar $x=1$ hingga orde 10. Ini akan menghasilkan deret Taylor dari $\log(x)$ yang mencakup suku-suku hingga orde 10. Hasil dari perintah ini adalah deret Taylor dari $\log(x)$. Deret ini dapat digunakan untuk mendekati nilai fungsi di sekitar $x=1$ dengan tingkat keakuratan yang diinginkan.

```
>$'f(sqrt(x)) =taylor(sqrt(x), x, 4, 5) // deret Taylor f(sqrt(x)) di sekitar x=4, sampai orde ke-5
```

$$f(\sqrt{x}) = \frac{x-4}{4} + \frac{7(x-4)^5}{131072} - \frac{5(x-4)^4}{16384} + \frac{(x-4)^3}{512} - \frac{(x-4)^2}{64} + 2$$

Perintah ini adalah contoh penggunaan deret Taylor untuk mendekati fungsi akar

$$\sqrt{x}$$

di sekitar $x=4$ hingga orde 5. Ini akan menghasilkan deret Taylor dari

$$\sqrt{x}$$

yang mencakup suku-suku hingga orde 5. Hasil dari perintah ini adalah deret Taylor dari

$$\sqrt{x}$$

Deret ini dapat digunakan untuk mendekati nilai fungsi di sekitar $x=4$ dengan tingkat keakuratan yang diinginkan.

Kekonvergenan adalah salah satu konsep penting dalam matematika yang digunakan untuk menggambarkan perilaku deret atau barisan. Kekonvergenan mengacu pada sifat deret atau barisan yang mendekati nilai tertentu saat jumlah suku atau indeks barisan mendekati tak hingga.

Dengan kata lain, konvergenan mengacu pada apakah deret tersebut memiliki "limit" atau "jumlah" saat suku-sukunya diperbanyak hingga tak terbatas.

Kekonvergenan Deret

Deret adalah penjumlahan tak hingga suku-suku barisan. Kekonvergenan deret mengacu pada sifat deret yang konvergen, yang berarti bahwa deret tersebut memiliki jumlah yang terbatas saat jumlah suku deret meningkat tak hingga. Jika deret konvergen, maka jumlahnya disebut "konvergen deret" atau "limit deret." Deret yang konvergen adalah deret yang jumlahnya ada dan terhingga.

Deret dikatakan konvergen jika, seiring kita menambahkan lebih banyak suku, jumlah parsial deret mendekati (dalam arti mendekati dalam batas tertentu) nilai L . Jika kondisi ini terpenuhi, maka deret tersebut dikatakan konvergen dan memiliki hasil yang konvergen, yaitu L .

Dalam hal ini, kita memeriksa apakah suku-suku barisan a_n mendekati (dalam arti mendekati dalam batas tertentu) nilai L saat n meningkat tak terbatas. Jika kondisi ini terpenuhi, maka barisan tersebut dikatakan konvergen dan memiliki hasil yang konvergen, yaitu L .

Terkadang kita ingin melakukan iterasi sampai konvergen. Apabila iterasinya tidak konvergen setelah ditunggu lama, Anda dapat menghentikannya dengan menekan tombol [ESC].

```
>iterate("cos(x)",1) // iterasi  $x(n+1)=\cos(x(n))$ , dengan  $x(0)=1$ .
```

0.739085133216

Iterasi tersebut konvergen ke penyelesaian persamaan

$$x = \cos(x)$$

Iterasi ini juga dapat dilakukan pada interval, hasilnya adalah barisan interval yang memuat akar tersebut

```
>hasil := iterate("cos(x)",~1,2~) //iterasi x(n+1)=cos(x(n)), dengan interval awal (1, 2)
```

```
~0.739085133211,0.7390851332133~
```

Jika interval (1,2) hasil tersebut sedikit diperlebar, akan terlihat bahwa interval tersebut memuat akar persamaan

$$x = \cos(x)$$

```
>h=expand(hasil,100), cos(h) << h
```

```
~0.73908513309,0.73908513333~
```

1

Iterasi juga dapat digunakan pada fungsi yang didefinisikan.

```
>function f(x) := (x+2/x)/2
```

Iterasi $x(n+1)=f(x(n))$ akan konvergen ke akar kuadrat 2.

```
>iterate("f",2), sqrt(2)
```

```
1.41421356237  
1.41421356237
```

Jika pada perintah `iterate` diberikan tambahan parameter `n`, maka hasil iterasinya akan ditampilkan mulai dari iterasi pertama sampai ke-`n`.

```
>iterate("f",2,5)
```

```
[2, 1.5, 1.41667, 1.41422, 1.41421, 1.41421]
```

Untuk iterasi ini tidak dapat dilakukan terhadap interval.

```
>niterate("f",~1,2~,5)
```

```
[ ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~, ~1,2~ ]
```

Perhatikan, hasil iterasinya sama dengan interval awal. Alasannya adalah perhitungan dengan interval bersifat terlalu longgar. Untuk meingkatkan perhitungan pada ekspresi dapat digunakan pembagian intervalnya, menggunakan fungsi `ieval()`.

```
>function s(x) := ieval("(x+2/x)/2",x,10)
```

Selanjutnya dapat dilakukan iterasi hingga diperoleh hasil optimal, dan intervalnya tidak semakin mengecil.

Hasilnya berupa interval yang memuat akar persamaan:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Satu-satunya solusi adalah

$$\sqrt{2}$$

```
>iterate("s",~1,2~)
```

```
~1.41421356236,1.41421356239~
```

Fungsi "iterate()" juga dapat bekerja pada vektor. Berikut adalah contoh fungsi vektor, yang menghasilkan rata-rata aritmetika dan rata-rata geometri.

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n} \right)$$

Iterasi ke-n disimpan pada vektor kolom x[n].

```
>function g(x) := [(x[1]+x[2])/2;sqrt(x[1]*x[2])]
```

Iterasi dengan menggunakan fungsi tersebut akan konvergen ke rata-rata aritmetika dan geometri dari nilai-nilai awal.

```
>iterate("g",[1;5])
```

```
2.60401
2.60401
```

Hasil tersebut konvergen agak cepat, seperti kita cek sebagai berikut.

```
>iterate("g",[1;5],4)
```

1	3	2.61803	2.60403	2.60401
5	2.23607	2.59002	2.60399	2.60401

Iterasi pada interval dapat dilakukan dan stabil, namun tidak menunjukkan bahwa limitnya pada batas-batas yang dihitung.

```
>iterate("g",[~1~;~5~],4)
```

Interval 2 x 5 matrix

```
~0.999999999999999778,1.000000000000000022~ ...
~4.99999999999999911,5.000000000000000089~ ...
```

Iterasi berikut konvergen sangat lambat.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n}.$$

```
>iterate("sqrt(x)",2,10)
```

```
[2, 1.41421, 1.18921, 1.09051, 1.04427, 1.0219, 1.01089,  
1.00543, 1.00271, 1.00135, 1.00068]
```

Kekonvergenan iterasi tersebut dapat dipercepat dengan percepatan Steffenson:

```
>steffenson("sqrt(x)",2,10)
```

```
[1.04888, 1.00028, 1, 1]
```

Iterasi menggunakan Loop yang ditulis Langsung

Berikut adalah beberapa contoh penggunaan loop untuk melakukan iterasi yang ditulis langsung pada baris perintah.

```
>x=2; repeat x=(x+2/x)/2; until x^2~=2; end; x,
```

```
1.41421356237
```

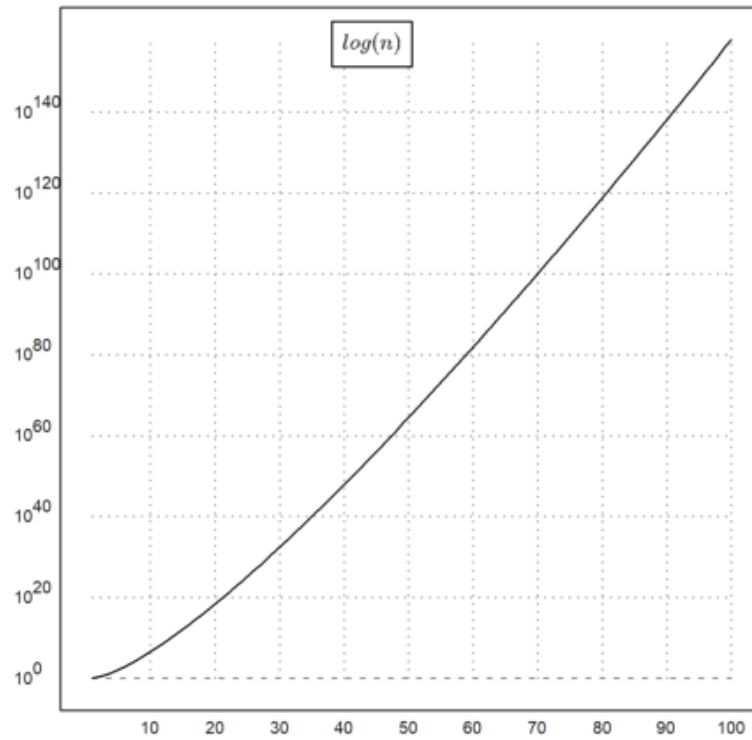
Penggabungan matriks menggunakan tanda "|" dapat digunakan untuk menyimpan semua hasil iterasi.

```
>v=[1]; for i=2 to 8; v=v|(v[i-1]*i); end; v,
```

```
[1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320]
```

hasil iterasi juga dapat disimpan pada vektor yang sudah ada.

```
>v=ones(1,100); for i=2 to cols(v); v[i]=v[i-1]*i; end; ...  
>plot2d(v,logplot=1); textbox(latex(&log(n)),x=0.5):
```



```
>A=[0.5,0.2;0.7,0.1]; b=[2;2]; ...  
>x=[1;1]; repeat xnew=A.x-b; until all(xnew~=x); x=xnew; end; ...  
>x,
```

-7.09677

-7.74194

Iterasi di dalam Fungsi

Fungsi atau program juga dapat menggunakan iterasi dan dapat digunakan untuk melakukan iterasi. Berikut adalah beberapa contoh iterasi di dalam fungsi.

Contoh berikut adalah suatu fungsi untuk menghitung berapa lama suatu iterasi konvergen. Nilai fungsi tersebut adalah hasil akhir iterasi dan banyak iterasi sampai konvergen.

```
>function map hiter(f$,x0) ...
```

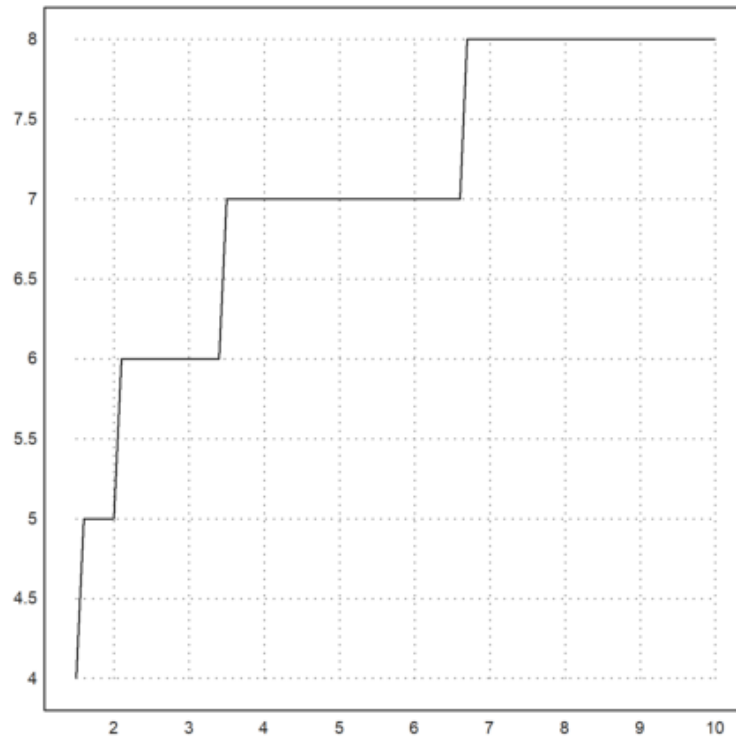
```
  x=x0;
  maxiter=0;
  repeat
    xnew=f$(x);
    maxiter=maxiter+1;
    until xnew~=x;
    x=xnew;
  end;
  return maxiter;
endfunction
```

Misalnya, berikut adalah iterasi untuk mendapatkan hampiran akar kuadrat 2, cukup cepat, konvergen pada iterasi ke-5, jika dimulai dari hampiran awal 2.

```
>hiter("(x+2/x)/2",2)
```

Karena fungsinya didefinisikan menggunakan "map". maka nilai awalnya dapat berupa vektor.

```
>x=1.5:0.1:10; hasil=hiter("(x+2/x)/2",x); ...  
> plot2d(x,hasil):
```



Dari gambar di atas terlihat bahwa kekonvergenan iterasinya semakin lambat, untuk nilai awal semakin besar, namun penambahannya tidak kontinu. Kita dapat menemukan kapan maksimum iterasinya bertambah.

```
>hasil[1:10]
```

```
[4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6]
```

```
>x[nonzeros(differences(hasil))]
```

```
[1.5, 2, 3.4, 6.6]
```

maksimum iterasi sampai konvergen meningkat pada saat nilai awalnya 1.5, 2, 3.4, dan 6.6.

Contoh berikutnya adalah metode Newton pada polinomial kompleks berderajat 3.

```
>p &= x^3-1; newton &= x-p/diff(p,x); $newton
```

$$x - \frac{x^3 - 1}{3x^2}$$

Selanjutnya didefinisikan fungsi untuk melakukan iterasi (aslinya 10 kali).

```
>function iterasi(f$,x,n=10) ...
```

```
    loop 1 to n; x=f$(x); end;  
    return x;  
endfunction
```

Kita mulai dengan menentukan titik-titik grid pada bidang kompleksnya.

```
>r=1.5; x=linspace(-r,r,501); Z=x+I*x'; W=iterasi(newton,Z);
```

Berikut adalah akar-akar polinomial di atas.

```
>z=&solve(p)()
```

```
[ -0.5+0.866025i,  -0.5-0.866025i,  1+0i  ]
```

Untuk menggambar hasil iterasinya, dihitung jarak dari hasil iterasi ke-10 ke masing-masing akar, kemudian digunakan untuk menghitung warna yang akan digambar, yang menunjukkan limit untuk masing-masing nilai awal.

Fungsi `plotrgb()` menggunakan jendela gambar terkini untuk menggambar warna RGB sebagai matriks.

Iterasi Simbolik

Seperti sudah dibahas sebelumnya, untuk menghasilkan barisan ekspresi simbolik dengan Maxima dapat digunakan fungsi makelist().

```
>&powerdisp:true // untuk menampilkan deret pangkat mulai dari suku berpangkat terkecil
```

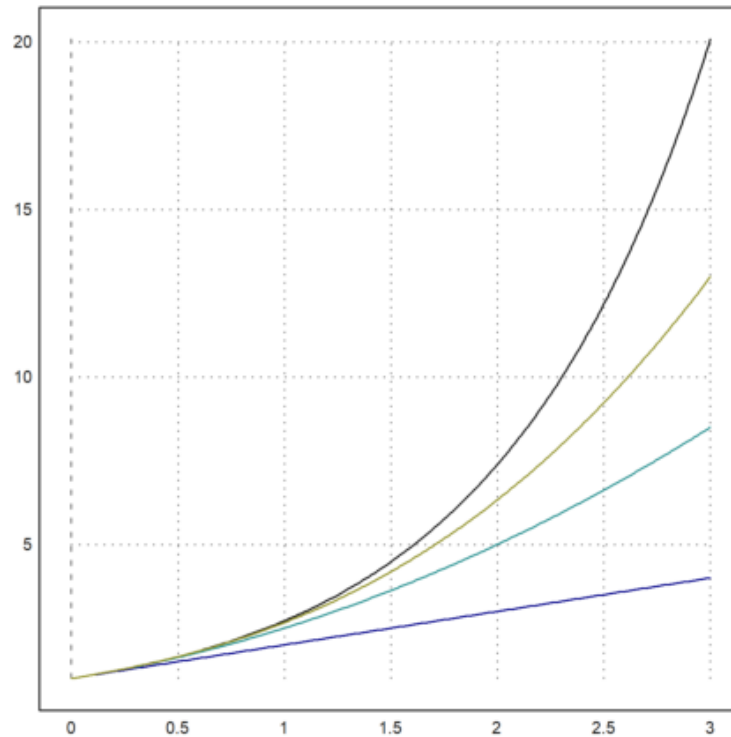
```
true
```

```
>deret &= makelist(taylor(exp(x),x,0,k),k,1,3); $deret // barisan deret Taylor untuk e^x
```

$$\left[1 + x, 1 + x + \frac{x^2}{2}, 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]$$

Untuk mengubah barisan deret tersebut menjadi vektor string di EMT digunakan fungsi mxm2str(). Selanjutnya, vektor string/ekspresi hasilnya dapat digambar seperti menggambar vektor ekspresi pada EMT.

```
>plot2d("exp(x)",0,3); // plot fungsi aslinya, e^x  
>plot2d(mxm2str("deret"),>add,color=4:6): // plot ketiga deret taylor hampiran fungsi tersebut
```

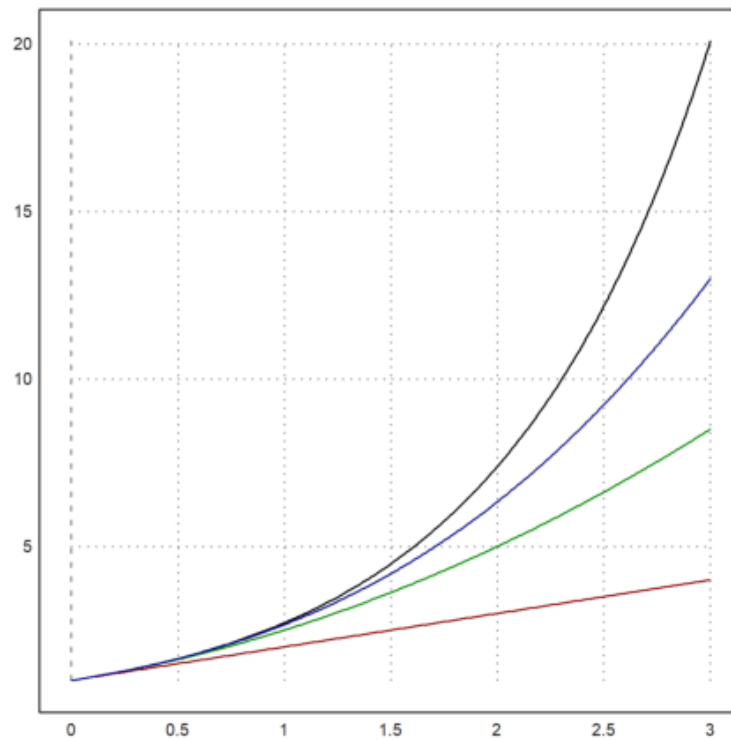


Selain cara di atas dapat juga dengan cara menggunakan indeks pada vektor/list yang dihasilkan.

```
>$deret[3]
```

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

```
>plot2d(["exp(x)",&deret[1],&deret[2],&deret[3]],0,3,color=1:4):
```



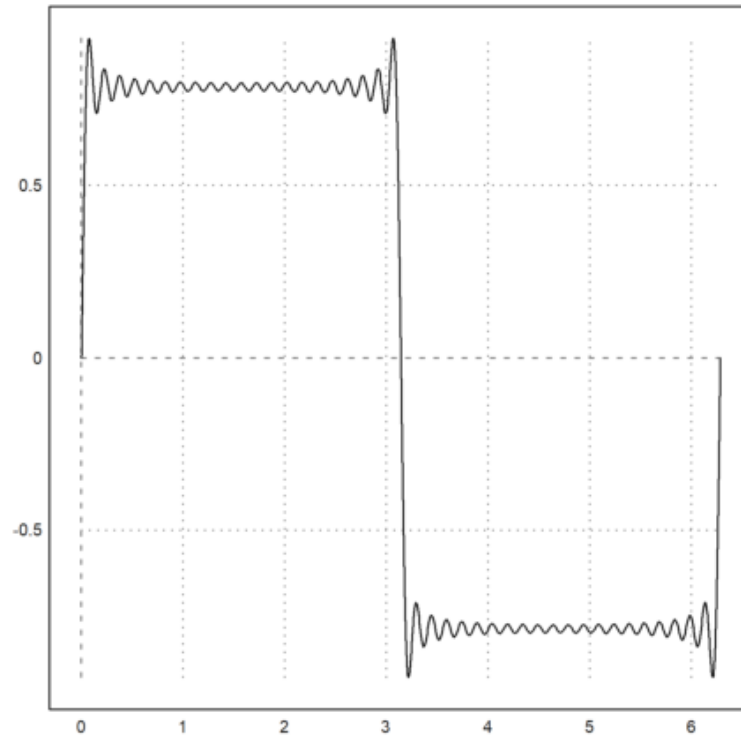
```
>$sum(sin(k*x)/k,k,1,5)
```

$$\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5}$$

Berikut adalah cara menggambar kurva

$$y = \sin(x) + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots$$

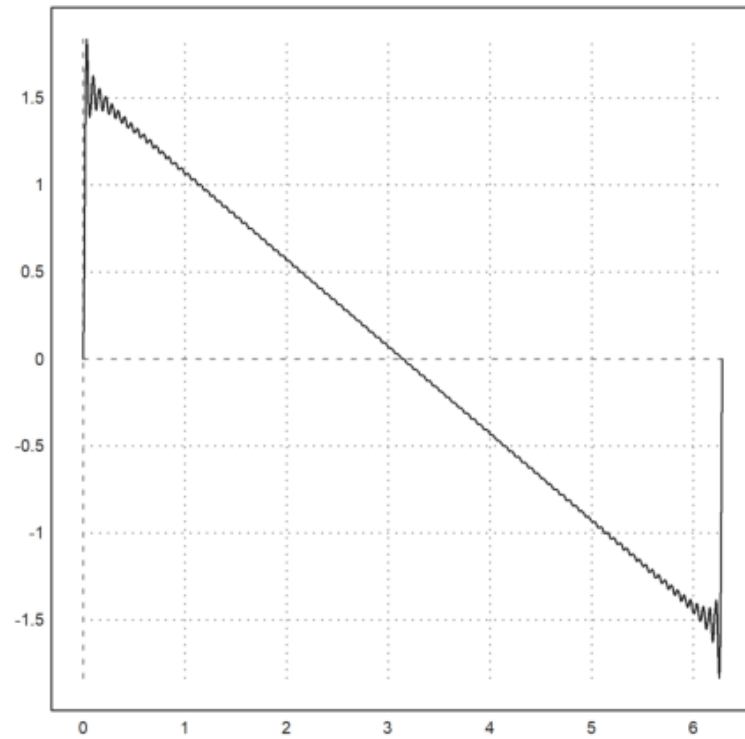
```
>plot2d(&sum(sin((2*k+1)*x)/(2*k+1),k,0,20),0,2pi):
```



Hal serupa juga dapat dilakukan dengan menggunakan matriks, misalkan kita akan menggambar kurva

$$y = \sum_{k=1}^{100} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

```
>x=linspace(0,2pi,1000); k=1:100; y=sum(sin(k*x')/k)'; plot2d(x,y):
```



SUBTOPIK 7

Nama : Pemilio Dwi Pramana Putra

NIM : 22301241025

Kelas : Pendidikan Matematika A

FUNGSI MULTIVARIABEL

Sebuah fungsi multivariabel adalah pemetaan matematis yang menghubungkan beberapa variabel independen dengan satu variabel dependen. Fungsi ini umumnya dinotasikan sebagai

$$f(x, y) \text{ atau } f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dimana $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel independen

dan f adalah variabel dependen.

Fungsi multivariabel dapat diwakili dalam bentuk peta atau grafik tiga dimensi.

Contoh fungsi multivariabel :

$$z = x^2 + y^2$$

Dimana variabel bebasnya yaitu x dan y .

Grafik Fungsi Multivariabel

Pada fungsi multivariabel, grafik fungsinya merupakan grafik tiga dimensi. Ruang dimensi tiga dilambangkan dengan

$$R^3$$

Permukaan dalam R^3 terdapat dua macam yakni permukaan linear dan kuadratik. Setiap permukaan linear berupa bidang datar, sedangkan permukaan kuadratik berupa bidang lengkung yang kelengkungannya bergantung atas bentuk persamaannya.

Untuk membuat grafik fungsi tiga dimensi, maka kita dapat menggunakan perintah "plot3d()"

Grafik Fungsi Persamaan Linear Dalam Dimensi Tiga

Bentuk umum persamaan permukaan linear adalah

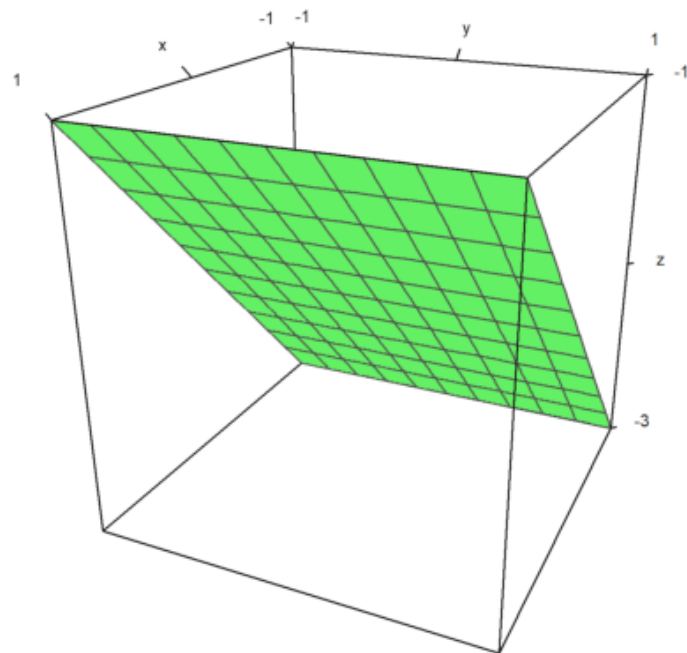
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Contoh grafik persamaan linear di ruang tiga dimensi

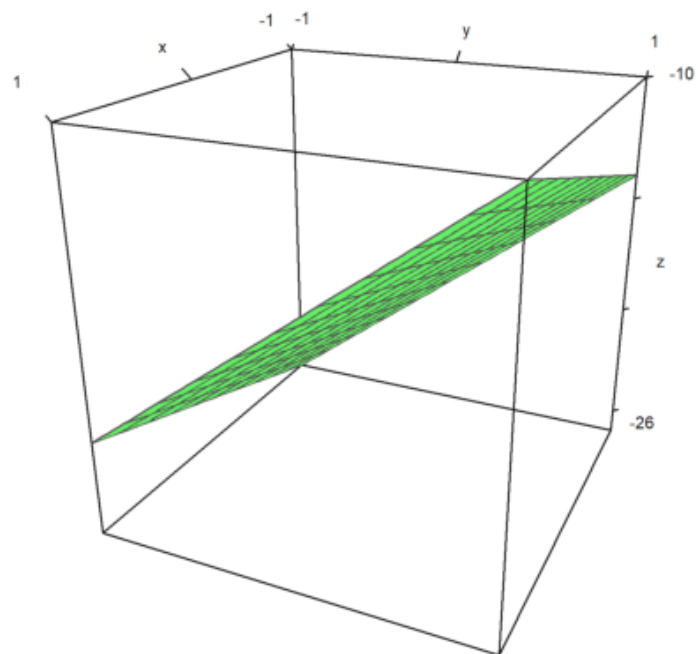
1.

$$x - 2$$

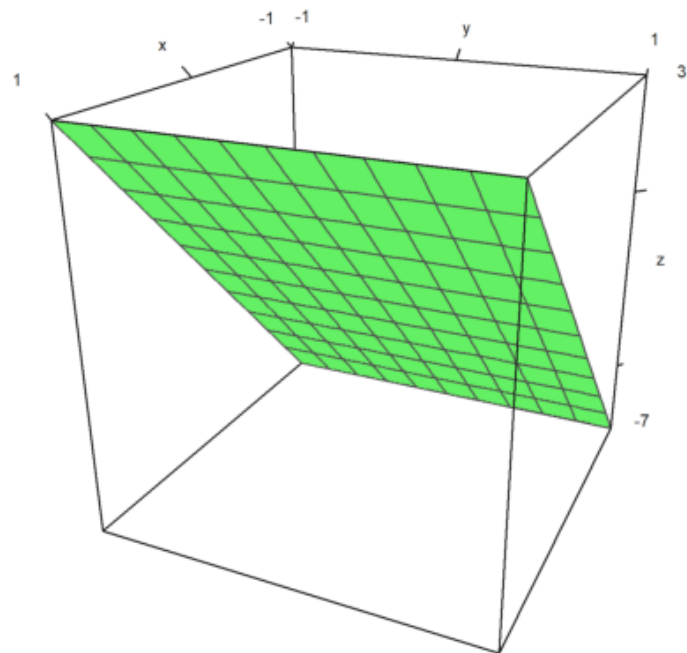
```
>plot3d("x-2"):
```



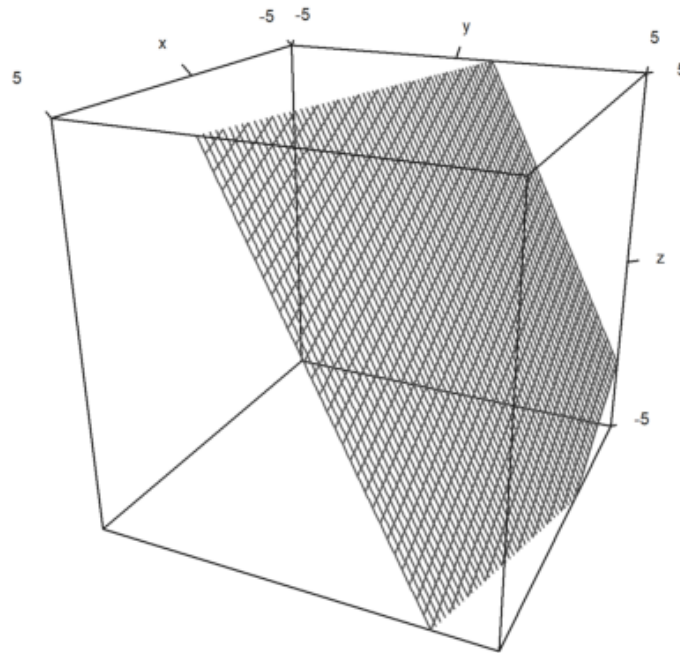
```
>plot3d("2*x+6*y-18"):
```



```
>plot3d("5*x-2"):
```



```
>plot3d("2*x+8*y+4*z-18",implicit=3,r=5):
```



Grafik Fungsi Kuadratik di Ruang Dimensi Tiga

Persamaan kuadratik mempunyai rumus umum :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

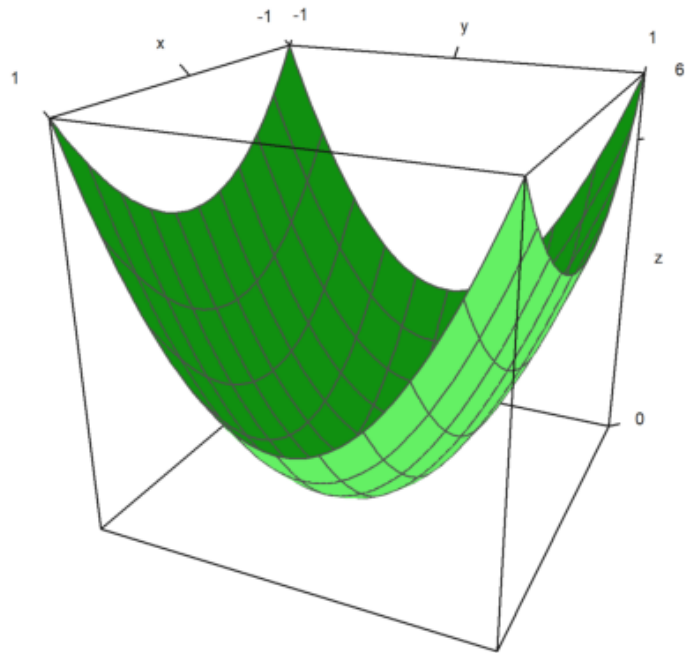
Permukaan-permukaan kuadratik dapat berupa permukaan bola, ellipsoida, paraboloida, tabung ellips, tabung lingkaran, atau tabung parabola.

Contoh grafik fungsi kuadratik di ruang dimensi tiga:

1.

$$2x^2 + 4y^2$$

```
>plot3d("2*x^2+4*y^2"):
```

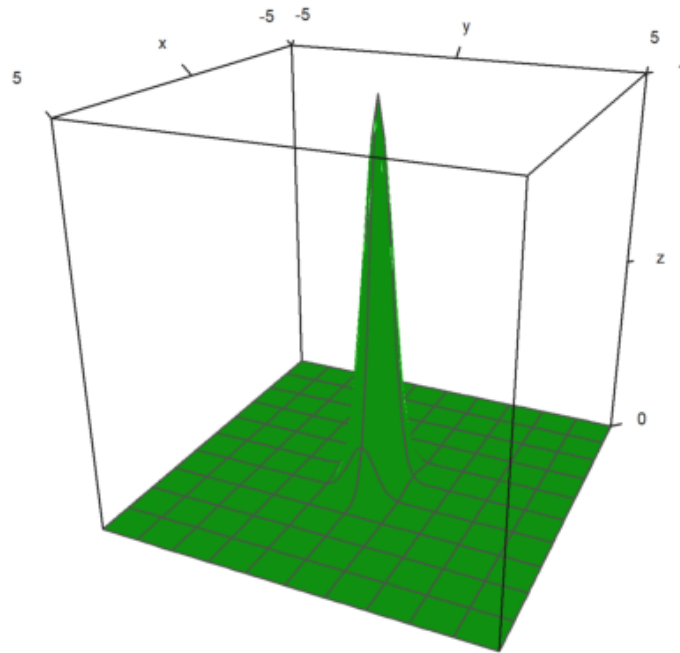


Pada contoh diatas, digunakan ekspresi langsung dalam fungsi plot3d dan permukaan tersebut berupa paraboloida.

2.

$$e^{-(2x^2+4y^2)}$$

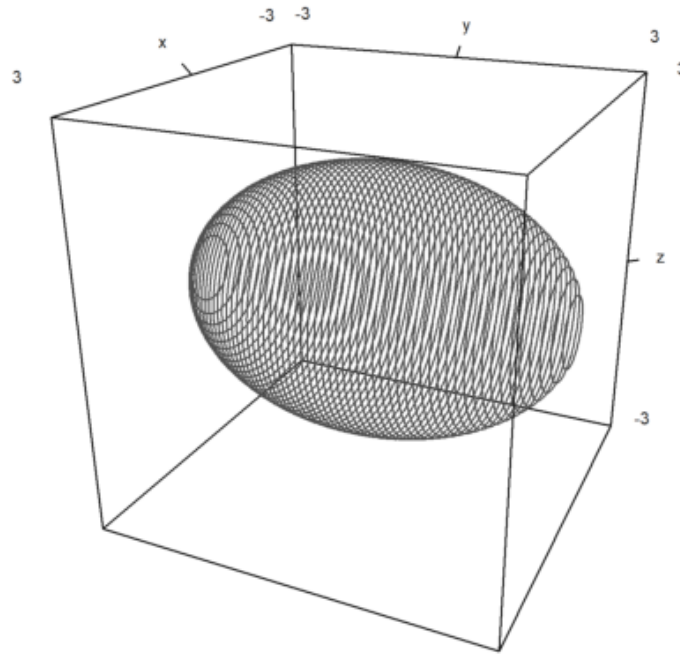
```
>function f(x,y) := exp(-(2*x^2+4*y^2))  
>plot3d("f", r=5):
```



Contoh 3:

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

```
>plot3d("9*x^2+4*y^2+9*z^2-36",implicit=2,r=3):
```



Gambar diatas merupakan ellipsoid yang persamaannya biasa dinyatakan dalam

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Sedangkan grafik diatas merupakan ellipsoid dengan persamaan :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

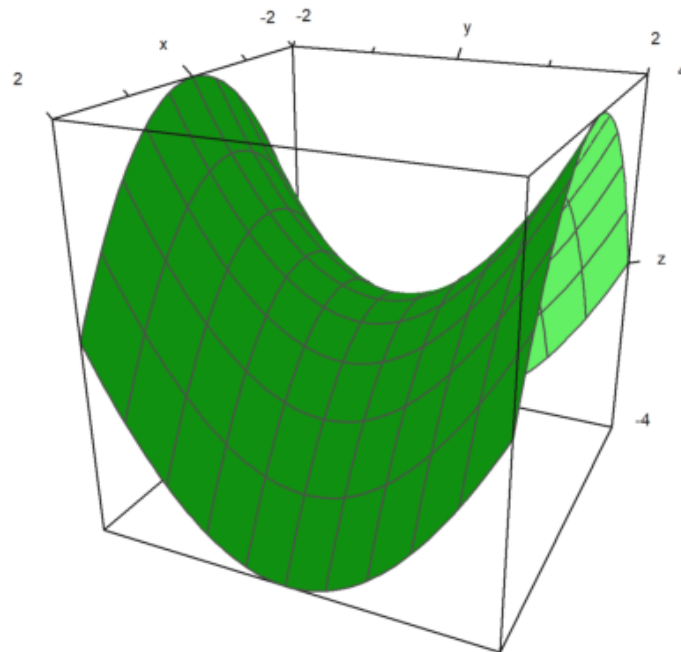
Namun, untuk memudahkan dalam memplotnya kita hilangkan bentuk pecahannya dengan mengurangi kedua ruas dengan satu lalu mengalikannya dengan 36 sehingga diperoleh

$$9x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$$

4.

$$y^2 - x^2$$

```
>plot3d("y^2-x^2",r=2,>user):
```

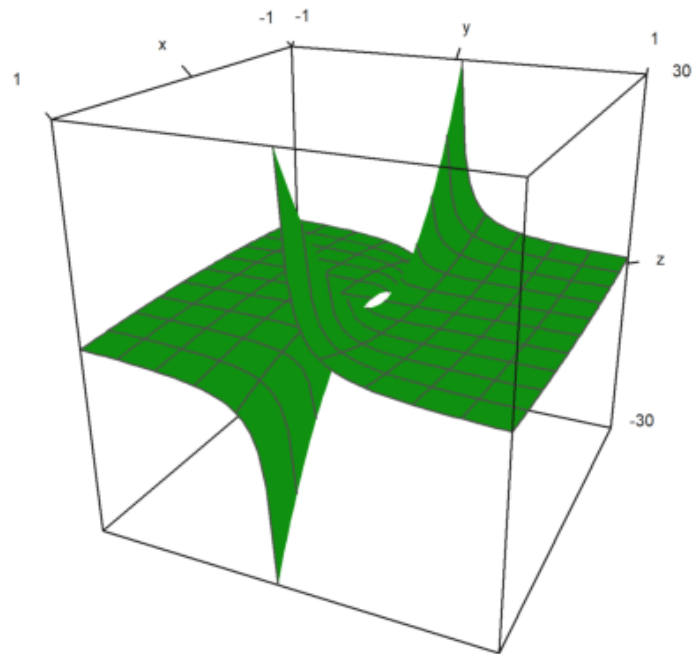


Gambar diatas merupakan paraboloida hiperbolik.

5.

$$\frac{x^2}{y}$$

```
>plot3d("x^2/y"):
```



Menggambar kurva perpotongan dari dua persamaan

Di EMT kita juga dapat menggabungkan dua kurva pada satu bidang untuk menggambarkan perpotongan. Untuk masalah ini kita gunakan fungsi `>add` dalam prosesnya.

Contoh :

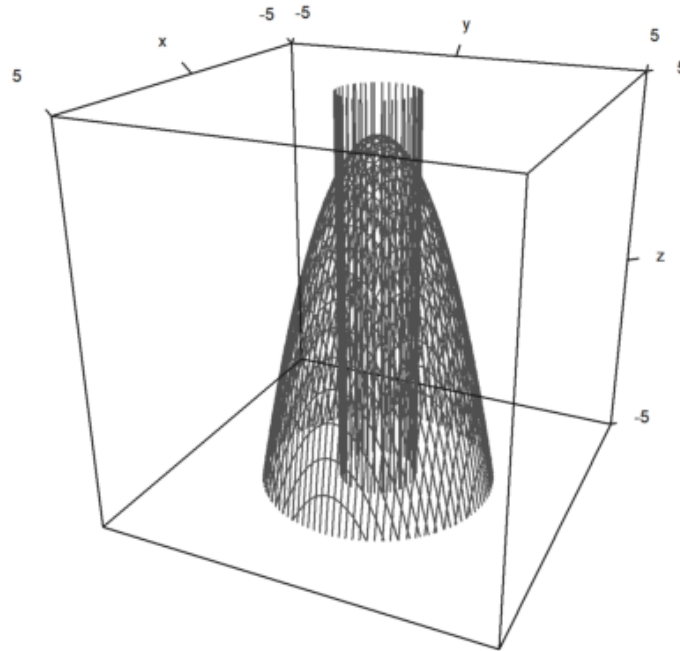
1.

$$x^2 + y^2 + z - 4 = 0$$

dengan

$$x^2 + y^2 = 1$$

```
>plot3d("x^2+y^2+z-4",r=5, implicit=3);  
>plot3d("x^2+y^2-1",implicit=3, r=5, >add):
```



Dari persamaan diatas, kita dapatkan perpotonga antara paraboloida dengan tabung lingkaran.

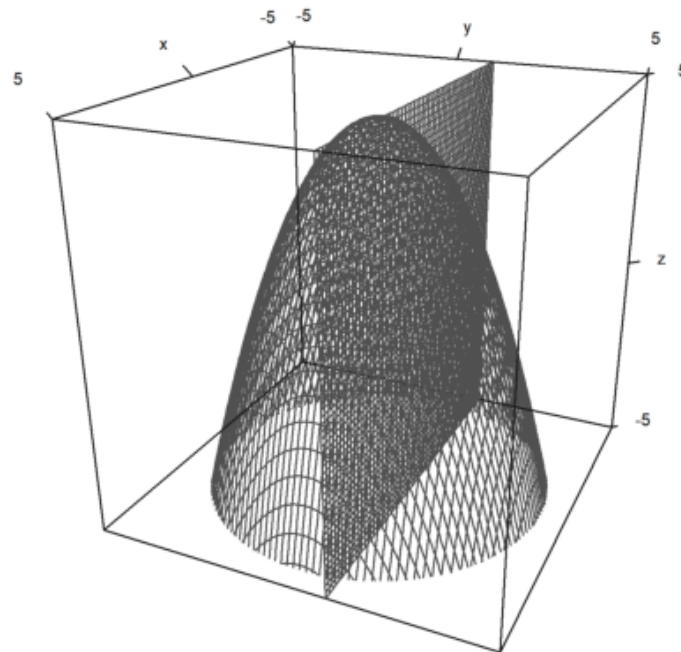
2.

$$x^2 + y^2 + 2z = 9$$

dengan

$$y = 1$$

```
>plot3d("x^2+y^2+2z-9",r=5,implicit=3);  
>plot3d("y-1",r=5, implicit=3, >add):
```



Dari persamaan diatas, didapatkan perpotongan antara bidang datar dan bidang lengkung.

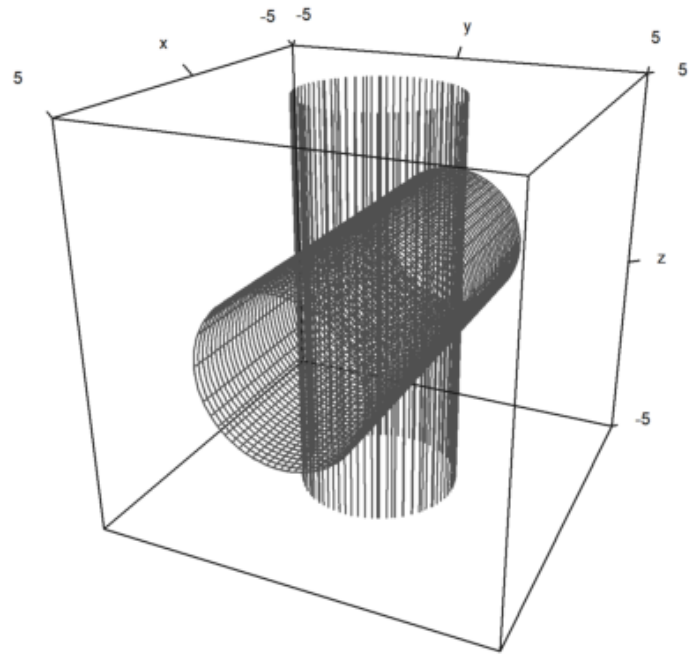
3.

$$x^2 + y^2 = 4$$

dengan

$$y^2 + z^2 = 4$$

```
>plot3d("x^2+y^2-4",r=5,implicit=3); plot3d("y^2+z^2-4",r=5,implicit=3,>add):
```



Didapatkan perpotongan antara dua tabung lingkaran.

Turunan Fungsi Multivariabel

Turunan Fungsi Dua Variabel

Turunan parsial, yaitu turunan fungsi terhadap satu variabel bebas sementara variabel bebas lainnya dianggap tetap atau konstan.

- Turunan Parsial terhadap f terhadap x di (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

- Turunan Parsial f terhadap y di (x_0, y_0)

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Contoh soal untuk turunan parsial :

1.

$$f(x, y) = 2xy - (1 - x^2)$$

```
>z &= 2*x*y-(1-x^2)
```

$$-1 + x^2 + 2xy$$

```
>$showev('limit(((2*(x+h)*y)-(1-(x+h)^2))/h,h,0))
```

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + (h+x)^2 + 2(h+x)y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + (h+x)^2 + 2(h+x)y}{h}$$

Perhitungan akan dilakukan menggunakan diff

```
>&diff(z,x) // z akan diturunkan terhadap x
```

$$2x + 2y$$

Karena pada fungsi z terdapat $2xy$ yang merupakan perkalian, untuk menghitung turunannya kita gunakan $u'v + uv'$, sehingga turunan dari $2xy$:

$$2.1.y + 2.x.0 = 2y$$

Kemudian turunan dari variabel berpangkat yaitu:

$$u^n = n.u^{n-1}.u'$$

Jadi turunan dari x^2 :

$$x^2 = 2.x^{2-1}.1 = 2x$$

Turunan dari konstanta adalah 0
sehingga, turunan dari fungsi

$$f(x, y) = 2xy + x^2 - 1$$

terhadap x adalah

$$f_x(x, y) = 2y + 2x$$

```
>&diff(z,y) // z akan diturunkan terhadap y
```

$$2x$$

Seperti pada turunan terhadap x, kita gunakan langkah yang sama namun kita anggap x konstan.

$$f(x, y) = 2xy + x^2 - 1$$

$$f_y(x, y) = 2x \cdot 1 + 0 - 0$$

$$f_y(x, y) = 2x$$

Jadi, turunan terhadap y dari f(x,y) adalah 2x.

Sehingga, turunan parsial dari

$$f(x, y) = 2xy + x^2 - 1 \text{ adalah}$$

$$f_x(x, y) = 2x + 2y$$

$$f_y(x, y) = 2x$$

2. Hitunglah turunan terhadap x dan terhadap y dari

$$f(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

```
>expr=x^2*cos(x*y); // definisikan fungsi f(x,y)  
>&diff(expr,x)
```

$$2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy)$$

x disini untuk menandakan bahwa fungsi diturunkan terhadap x dan y dianggap konstan.

```
>&diff(expr,y)
```

$$-x^3 \sin(xy)$$

y menandakan bahwa fungsi diturunkan terhadap y dan x dianggap konstan.

Jadi, turunan dari fungsi

$$x^2 \cos(xy)$$

terhadap x : $2x.\cos(xy) - x^2y.\sin(xy)$

terhadap y : $-x^3\sin(xy)$

3. Hitunglah turunan terhadap x dan terhadap y dari

$$f(x, y) = x^2y + 3y^3$$

```
>z = x^2*y + 3*y^3
```

$$x^2 y + 3 y^3$$

```
>diff(z,x)
```

$$2 x y$$

Karena disini y dianggap konstan, maka turunan dari $3y^3 = 0$.

Lalu kita hitung turunan dari x^2y dengan aturan turunan bentuk perkalian sehingga didapatkan $2xy$ sebagai hasil turunan terhadap x .

```
>&diff(z,y)
```

$$x^2 + 9y^2$$

Lalu, disini x dianggap konstan jadi kita turunkan dahulu $3y^3$ terhadap y didapatkan $9y^2$ dan turunkan x^2y terhadap y didapatkan x^2 . Jadi turunannya terhadap y adalah

$$9y^2 + x^2$$

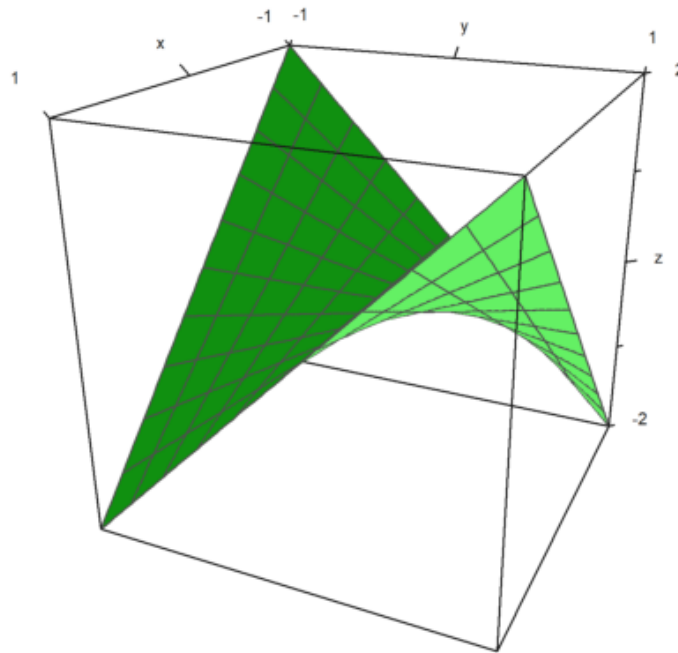
Jadi, turunan parsialnya adalah

$$f_x(x, y) = 2xy$$

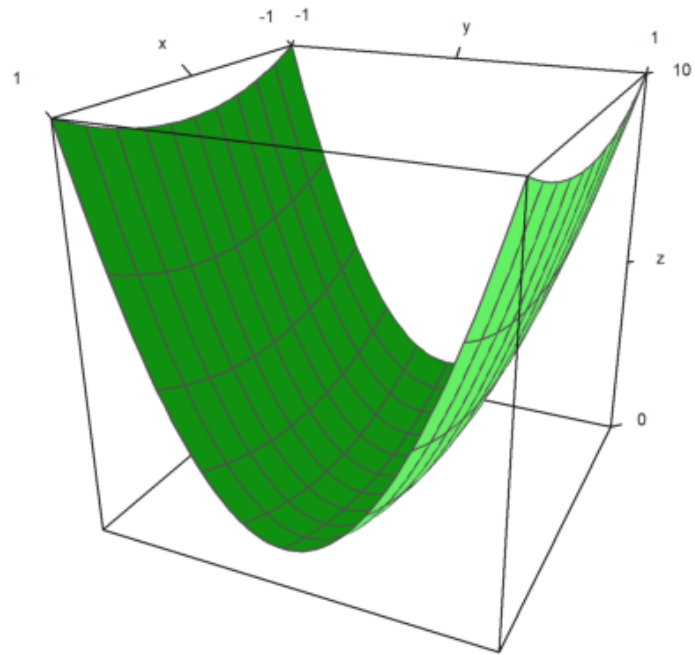
$$f_y(x, y) = 9y^2 + x^2$$

Apabila kita gambarkan grafiknya untuk masing masing turunan tersebut :

```
>plot3d("2*x*y"): // turunan thd x
```



```
>plot3d("9*y^2+x^2"): // turunan thd y
```



4. Tentukan turunan parsial dari

$$3e^{2x}\cos(y)$$

```
>z &= 3*E^(2*x)*cos(y)
```

$$3 E^{2 x} \cos (y)$$

```
>&diff(z,x)
```

$$6 E^{2 x} \cos (y)$$

Turunan terhadap x maka y dianggap konstan.

```
>&diff(z,y)
```

$$- 3 E^{2 x} \sin (y)$$

Turunan terhadap y maka x dianggap konstan.

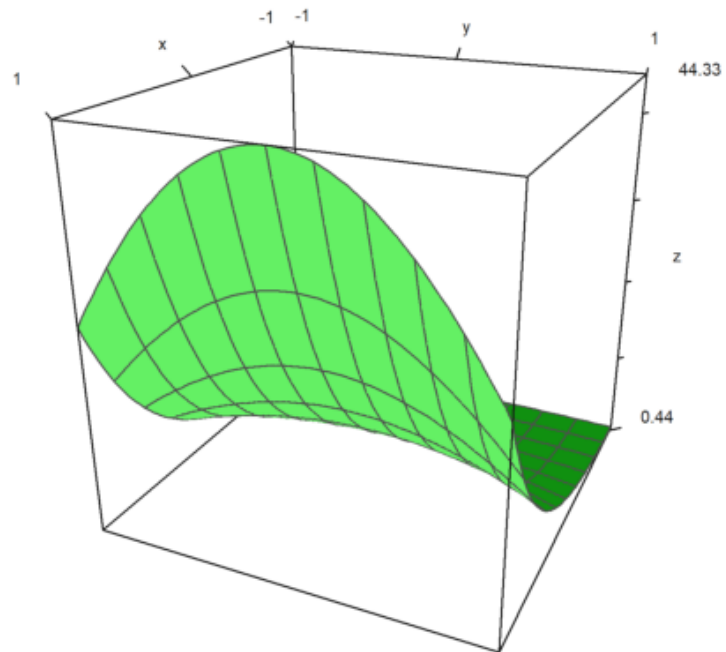
Jadi, turunan parsialnya adalah :

$$f_x(x, y) = 6e^{2x} \cos(y)$$

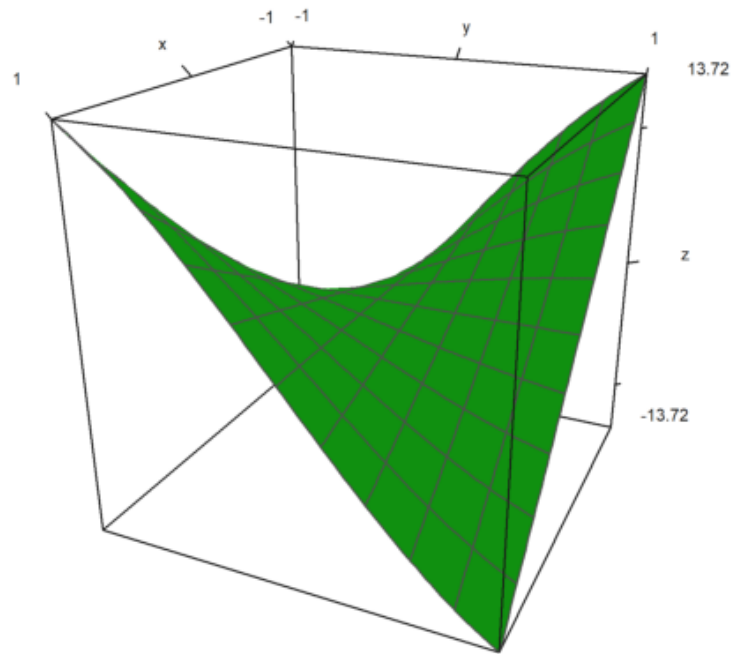
$$f_y(x, y) = -3e^{2x} \sin(y)$$

Apabila digambarkan grafiknya untuk masing-masing turunan:

```
>plot3d("6*E^(2*x)*cos(y)":
```



```
>plot3d("-3*E*(2*x)*sin(y)":
```



Turunan Orde Tinggi

Turunan parsial kedua meliputi :

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Fungsi f diturunkan terhadap x kemudian turunan pertama diturunkan lagi terhadap x.

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Fungsi f diturunkan terhadap x kemudian turunan pertamanya diturunkan lagi terhadap y.

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Fungsi f diturunkan terhadap y kemudian turunan pertama diturunkan lagi terhadap y.

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Fungsi f diturunkan terhadap y kemudian turunan pertama diturunkan lagi terhadap x.

Turunan parsial tingkat tiga dan lebih tinggi didefinisikan dengan cara yang sama dan cara penulisannya pun serupa. Jadi, jika suatu fungsi dua variabel x dan y, turunan parsial ketiga f yang diperoleh dengan mendiferensialkan f secara parsial, pertamakali terhadap x dan kemudian terhadap y, akan ditunjukkan oleh

$$f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

Seluruhnya, terdapat delapan turunan parsial ketiga.

Contoh :

1. Carilah keempat turunan parsial kedua dari

$$f(x, y) = x^3 y^2$$

```
>f &= (x^3)*(y^2)
```

$$\begin{matrix} 3 & 2 \\ x & y \end{matrix}$$

```
>fx &= diff(f,x)
```

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 3x & y \end{matrix}$$

Jadi, fungsi f diturunkan terhadap x

$$f_x = 3x^2 y^2$$

Hasil ini didapat dengan menggunakan $u'.v + u.v'$ dimana $u=x^3$ dan $v=2y^2$. Karena apabila v diturunkan terhadap x akan sama dengan 0, jadi

$$u'.v + u.v' = 3.x^2.y^2 + x^3.0 = 3x^2y^2$$

Kemudian, f_x akan diturunkan lagi terhadap x .

```
>fxx &= diff(fx,x)
```

$$6xy^2$$

Fungsi f diturunkan lagi terhadap x

$$u'.v + u.v' = 3.2.x.y^2 + 3x^2.0 = 6xy^2$$

Hasil diatas didapat dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya yaitu menggunakan $u'.v + u.v'$. Jadi, turunan kedua terhadap x dari fungsi f adalah

$$f_{xx} = 6xy^2$$

Selanjutnya yaitu fungsi f akan diturunkan terhadap x kemudian diturunkan lagi terhadap y.

```
>fxy &= diff(fx,y)
```

$$6x^2y$$

$$u'.v + u.v' = 0.y^2 + 3x^2.2.y = 6x^2y$$

Selanjutnya, akan dicari turunan f terhadap y kemudian diturunkan lagi terhadap y.

```
>fy &= diff(f,y)
```

$$2x^3y$$

```
>fyy &= diff(fy,y)
```

$$2x^3$$

Jadi turunan kedua f terhadap y adalah

$$f_{yy} = 2x^3$$

Selanjutnya, akan dicari turunan f terhadap y kemudian diturunkan lagi terhadap x .

```
>fyx <- diff(fy,x)
```

$$6x^2y$$

Jadi,

$$f_{yx} = 6x^2y$$

Kita telah dapatkan keempat turunan parsial kedua

$$f_{xx} = 6xy^2$$

$$f_{xy} = 6x^2y$$

$$f_{yy} = 2x^3$$

$$f_{yx} = 6x^2y$$

Dari hasil yang telah didapat,

$$f_{xy} = f_{yx}$$

yang berarti bahwa f_{xy} dan f_{yx} kontinu pada suatu himpunan terbuka S , $f_{xy}=f_{yx}$ pada tiap titik dari S .

2. Carilah f_{xx} dan f_{yy} dari fungsi berikut

$$f(x, y) = xe^y - \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3y^2$$

```
>f &= x*E^y-sin(x/y)+x^3*y^2
```

$$- \sin\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 y^2 + x^3 E^y$$

```
>fx &= diff(f,x) // f akan diturunkan terhadap x
```

$$- \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y} + 3 x^2 y + E^y$$

```
>fxx &= diff(fx,x) // turunan pertama dari f terhadap x diturunkan lagi terhadap x
```

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + 6 x y$$

y

```
>fy &= diff(f,y) // f akan diturunkan terhadap y
```

$$\frac{x \cos\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} + 2 x^3 y + x^y E$$

```
>fyy &= diff(fy,y) // turunan pertama dari f terhadap y diturunkan lagi terhadap y
```

$$2 x^3 + \frac{x^2 \sin\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^4} - \frac{2 x^x \cos\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^3} + x^y E$$

Jadi, turunan parsial kedua fungsi f terhadap x dan y adalah

$$f_{xx} = 6xy^2 + \frac{1}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_{yy} = xe^y - \frac{1}{y^3} 2x \cos\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^4} x^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) + 2x^3$$

Turunan Untuk Lebih Daripada Dua Variabel

Misalkan f suatu fungsi tiga variabel x , y , dan z . Turunan parsial f terhadap x di (x, y, z) dinyatakan oleh $f_x(x, y, z)$ dan didefinisikan oleh

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

Jadi, $f_x(x,y,z)$ dapat diperoleh dengan memperlakukan y dan z sebagai konstanta dan melakukan diferensiasi terhadap x .

Turunan parsial terhadap y dan z didefinisikan dengan cara yang serupa. Turunan parsial fungsi empat variabel atau lebih didefinisikan secara serupa pula.

Turunan-turunan parsial seperti f_{xy} dan f_{xyz} yang melibatkan diferensiasi terhadap lebih dari satu variabel disebut turunan parsial campuran.

Sedangkan untuk turunan parsial orde tinggi lebih dari 2 variabel, dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti mencari turunan parsial orde tinggi pada fungsi dua variabel.

Contoh :

1. Carilah semua turunan pertama dan turunan T_{xw} dari fungsi T berikut

$$T(w, x, y, z) = ze^{w^2+x^2+y^2}$$

```
>t &= z*E^(w^2+x^2+y^2) // definisikan fungsi t
```

$$\frac{2}{3} E^{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2} \cos(y)$$

```
>tx &= diff(t,x) // turunan t terhadap x
```

$$\frac{2}{3} (2 + 2 x) E^{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2} \cos(y)$$

```
>ty &= diff(t,y) // turunan t terhadap y
```

$$\frac{2}{6} y E \frac{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2}{\cos(y)} - 3 E \frac{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2}{\sin(y)}$$

```
>txz &= diff(t,w) // turunan t terhadap w
```

$$\frac{2}{6} w E \frac{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2}{\cos(y)}$$

```
>txz &= diff(tx,w) // turunan t terhadap x kemudian diturunkan lagi terhadap w
```

$$\frac{2}{6} w (2 + 2 x) E \frac{w^2 + 2 x^2 + x^2 + y^2}{\cos(y)}$$

Jadi, semua turunan parsial pertamanya adalah

$$t_x(w, x, y, z) = 2xz e^{y^2+x^2+w^2}$$

$$t_y(w, x, y, z) = 2yz e^{y^2+x^2+w^2}$$

$$t_z(w, x, y, z) = e^{y^2+x^2+w^2}$$

$$t_w(w, x, y, z) = 2wz e^{y^2+x^2+w^2}$$

Dan t_{xw}

$$4wxz e^{y^2+x^2+w^2}$$

Integral lipat dua f pada R , diberikan oleh

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy$$

atau bisa ditulis dengan

$$\int_R \int f(x, y) \, dA$$

Misalkan R adalah sebuah persegipanjang dengan sisi-sisi sejajar sumbu-sumbu koordinat; yaitu, misalkan

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Urutan dx dan dy penting karena ia merinci integrasi mana yang akan dilakukan pertama.

SIFAT-SIFAT INTEGRAL LIPAT DUA:

1. Integral lipat dua bersifat linear, yaitu:

$$\begin{aligned} a. \iint_R k f(x, y) dA &= k \iint_R f(x, y) dA \\ b. \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] dA &= \iint_R f(x, y) dA + \iint_R g(x, y) dA \end{aligned}$$

2. Integral lipat dua bersifat aditif(dapat dijumlahkan) pada persegi panjang yang saling berhimpit pada hanya sebuah ruas garis

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

3. Sifat perbandingan berlaku jika

$f(x, y) \leq g(x, y)$ untuk semua (x, y) di R maka

$$\iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

CONTOH :

1. Hitung

$$\iint (2xy) dx dy$$

Dengan memperhatikan urutan dx dan dy, pada soal kali ini kita hitung integralnya dari sebelah dalam yaitu kita integralkan terhadap x terlebih dahulu.

```
>qx <- integrate((2*x*y),x)
```

$$x^2 y$$

Setelah kita integralkan terhadap x, lalu hasilnya kita integralkan terhadap y.

```
>qy <- integrate(qx,y)
```

$$\frac{x^2 y^2}{2}$$

Jadi, hasil dari

$$\iint (2xy) \, dx \, dy$$

adalah

$$\frac{x^2 y^2}{2} + c$$

2. Hitung

$$\int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y) dx \right] dy$$

```
>f &= 2*x+3*y
```

$$2 x + 3 y$$

Dalam integral sebelah dalam, y berupa konstanta, sehingga

```
>fx &= integrate((2*x+3*y),x,1,2)
```

$$3 + 3 y$$

Setelah mencari integral terhadap x, lalu kita integralkan hasil tersebut terhadap y, akibatnya

```
>fy &= integrate((3+3*y),y,0,3)
```

45
--
2

Akan kita tukar urutan integrasi dari contoh 2; diharapksn jawabannya akan tetap sama seperti pada contoh 2.

3. Hitung

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 (2x + 3y) dy \right] dx$$

```
>f &= 2*x+3*y
```

2 x + 3 y

```
>fy &= integrate(f,y,0,3)
```

$$\frac{27 + 12x}{2}$$

```
>fx &= integrate(fy,x,1,2)
```

$$\frac{45}{2}$$

Ternyata didapatkan hasil yang sama. Jadi, jika urutan pengintegrasiannya dibalik, hasil akan tetap sama asalkan batas integral sesuai.

4. Hitung

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16} [64 - 8x + y^2] dx dy$$

Kita akan mengerjakan dari dalam ke luar yaitu kita integralkan dahulu terhadap x dengan batas x=0 sampai x=4

```
>g &= (1/16)*(64-8*x+y^2)
```

$$\frac{64 - 8x + y^2}{16}$$

```
>gx &= integrate(g,x,0,4)
```

$$\frac{192 + 4y^2}{16}$$

Setelah didapatkan integral terhadap x, kita integralkan lagi terhadap y dengan batas y=0 sampai y=8.

```
>gy &= integrate(gx,y,0,8)
```

$$\frac{416}{3}$$

Jadi, hasil dari

$$\int_0^8 \int_0^4 \frac{1}{16} [64 - 8x + y^2] dx dy = \frac{416}{3}$$

5. Hitung

$$\int_0^\pi \int_0^1 x \sin(y) dx dy$$

```
>function s(x,y) &= x*sin(y)
```

```
x sin(y)
```

```
>sx &= integrate(s(x,y),x,0,1)
```

$$\frac{\sin(y)}{2}$$

Hitung dari dalam keluar yaitu hitung integral terhadap x terlebih dahulu dengan batas x=0 sampai x=1.

```
>sy &= integrate(sx,y,0,pi)
```

1

Setelah dihitung integralnya terhadap x dengan batas yang ada, kemudian integralkan hasil tersebut terhadap y dengan batas y=0 sampai y=pi.

Jadi hasil dari

$$\int_0^{\pi} \int_0^1 x \sin(y) dx dy = 1$$

Aplikasi Fungsi Multivariabel

Penerapan Plot Kontur

Peta kontur seringkali digunakan untuk memperlihatkan kondisi cuaca atau lainnya dari berbagai titik dalam peta.

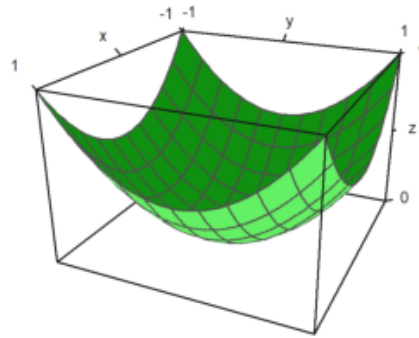
1. Buatlah plot kontur dari fungsi berikut

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ dengan level bilangan genap dari 0 sampai 20}$$

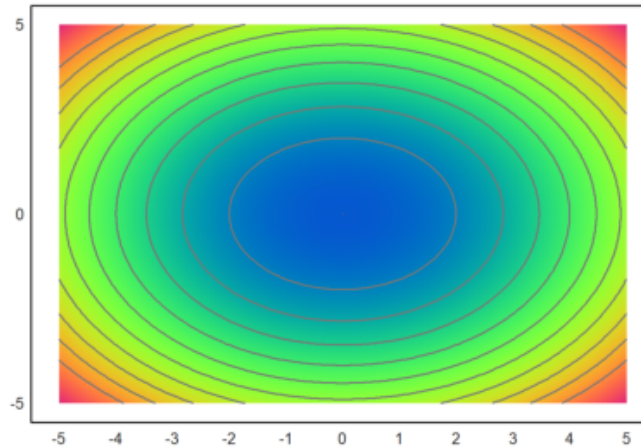
```
>f <= 1/2*(x^2+y^2)
```

$$\frac{x^2 + y^2}{2}$$

```
>aspect(1.5);  
>plot3d(f):
```



```
>plot2d(f,level=0:2:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4,r=5):
```



2. Seorang ahli geologi sedang melakukan penelitian di daerah vulkanik. Dia tertarik untuk memahami bagaimana ketinggian permukaan tanah di sekitar gunung berapi berubah. Ketinggian di suatu titik (x, y) dalam kilometer di sekitar gunung berapi tersebut dapat dijelaskan oleh fungsi ketinggian $H(x, y)$, di mana x dan y adalah koordinat dalam kilometer. Fungsi ketinggian $H(x, y)$ diberikan oleh persamaan:

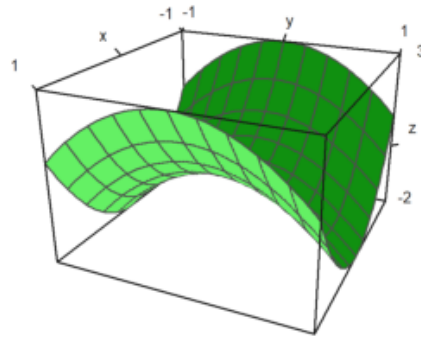
$$H(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

Gambarkan plot kontur dari fungsi ketinggian $H(x, y)$ untuk memvisualisasikan perubahan ketinggian di sekitar gunung berapi dengan level ketinggian 1 sampai 7 km.

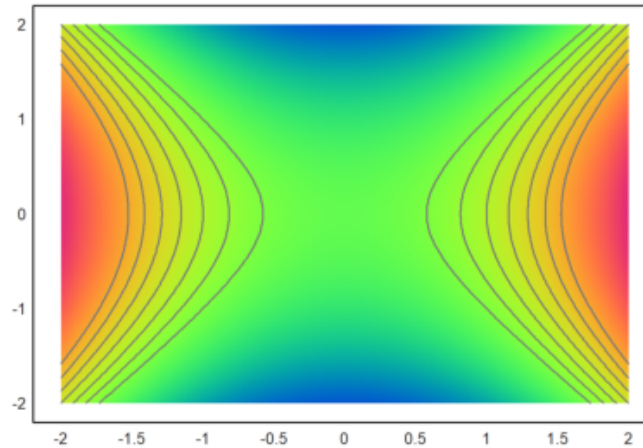
```
>h <- 3*x^2-2*y^2
```

$$3x^2 - 2y^2$$

```
>plot3d(h):
```



```
>aspect(1.5);  
>plot2d(h,level=1:1:7,>hue,>spectral,n=200,grid=4,r=2):
```



Laju Perubahan

Dalam hal ini turunan parsial dapat digunakan sebagai tingkat perubahan terhadap variabel tertentu.

1. Volume suatu gas tertentu dihubungkan terhadap suhunya T dan tekanannya P menurut hukum gas $PV = 10T$, dengan V diukur dalam inci kubik, P dalam pon per inci kuadrat, dan T dalam derajat Kelvin. Jika V dijaga tetap konstan pada 50, berapakah laju perubahan tekanan terhadap suhu ketika $T=200$?

Diketahui :

$$P = \frac{10T}{V}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{10}{V}$$

Jadi, untuk mengetahui berapa laju perubahan tekanan terhadap suhu ketika $T=200$ dan $V=50$, maka perlu kita substitusikan T dan V ke P

$$p = \frac{10 \cdot T}{V}$$

$$\frac{10 \cdot T}{V}$$

$$\frac{dp}{dT}$$

$$\frac{10}{V}$$

$$\frac{10}{50}$$

$$0.2$$

Jadi, tekanan bertambah lebih besar pada laju 1/5 atau 0.2 pon per inci kuadrat per derajat Kelvin.

2. Pasir yang dituangkan pada lantai akan membentuk kerucut. Pada saat kerucut mencapai tinggi 100 cm dan jari-jari 40 cm diperoleh laju pertambahan tinggi dan jari-jarinya berturut-turut 5 cm/menit dan 2 cm/menit. Hitunglah seberapa cepat laju pertambahan volume pada saat itu.

Penyelesaian :

Diketahui :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dh}{dt} = 5$$

$$\frac{dr}{dt} = 2$$

Pertama kita cari terlebih dahulu turunan dari V terhadap h dan turunan dari V terhadap r

```
>V &= 1/3*pi*r^2*h // definisikan V
```

$$\frac{\pi r^2 (3x^2 - 2y^2)}{3}$$

```
>Vr &= diff(V,r) // turunan V thd r
```

$$\frac{2 \pi r (3 x^2 - 2 y^2)}{3}$$

Jadi didapatkan

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3} \pi r^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3} \pi r h$$

Setelah itu kita cari turunan V terhadap t dengan

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$>V_t \ \&= \ V_h*5+V_r*2$$

$$5 \ V_h + \frac{4 \pi r (3 x^2 - 2 y^2)}{3}$$

Setelah didapatkan turunan V terhadap t , kita akan hitung laju pertambahan volume disaat $h=100$ dan $r=40$ dengan mensubstitusikan h dan r ke turunan V terhadap t

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}(100, 40) &= \frac{5}{3}\pi \cdot 1600 + \frac{4}{3}\pi \cdot 4000 \\ &= \frac{8000}{3}\pi + \frac{16.000}{3}\pi \\ &= 8000\pi\end{aligned}$$

Jadi, laju pertumbuhan volumenya adalah

$$8000\pi \text{ cm}^3/\text{mnt}$$

Penerapan Integral Lipat Dua

1. Sebuah lamina dengan kerapatan

$$\delta(x, y) = xy$$

dibatasi oleh sumbu-x, garis $x=8$, dan kurva $y=x^{2/3}$. Carilah massa totalnya.

Rumus massa diberikan oleh

$$m = \iint_S \delta(x, y) dA$$

Jadi,

$$m = \iint_S xy dA = \int_0^8 \int_0^{x^{(2/3)}} xy dy dx$$

```
>my &= integrate((x*y),y,0,x^(2/3))
```

$$\frac{x^{7/3}}{2}$$

```
>mx &= integrate(my, x,0,8)
```

$$\frac{768}{5}$$