Teoría – Tema 3

Teoría - 10 - Teorema de Rolle

Teorema de Rolle

Si una gráfica toma valores iguales en los extremos del intervalo $[a,b]$, y la función es continua en ese intervalo y derivable en (a,b) , es intuitivo pensar que existirá al menos un punto $c\in(a,b)$ donde la curva alcance, de manera suave, un máximo o mínimo relativo. Y en ese punto podremos aplicar la condición necesaria de extremos relativos: $f'(c)=0$.

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y verifica que $f(a)=f(b)$, implica que $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$

Demostración: Por el teorema de continuidad de Bolzano-Weierstrass sabemos que toda función continua en $[a,b]$ alcanza dentro del intervalo su máximo absoluto $Máx$ y su mínimo absoluto $Mín$ en dicho intervalo.

Si $Máx=Mín$ $\rightarrow$ $Mín=f(x)=Máx,\ \forall\ c\in[a,b]$ ya que $f(a)=f(b)$. Es decir, la función $f(x)$ es constante → Su derivada será igual a 0 en todos los puntos del intervalo → Por lo tanto existe al menos un punto del intervalo donde $f'(c)=0$.

Si $Máx\neq Mín$, al menos uno de los extremos será distinto del valor $f(a)=f(b)$. Supongamos $Máx\neq f(a)=f(b)$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass sabemos que la función alcanza su máximo absoluto dentro del intervalo abierto, ya que el máximo no coincide con el valor de la función en los extremos → $\exists c\in(a,b)/f(c)=Máx$ → Y todo máximo absoluto es, a su vez, máximo relativo → $f'(c)=0$.

Si suponemos $Mín\neq f(a)=f(b)$ el razonamiento es análogo, por lo que $\exists c\in(a,b)/f(c)=Mín$ → $f'(c)=0$. Quedando así demostrado el teorema.

Ejemplo 1 resuelto

Aplica el Teorema de Rolle a la función $f(x)=x^2+x+1$ **en el intervalo** $[-2,1]$ **.**

$f(x)=x^2+x+1$ → Continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$f(-2)=3$, $f(1)=3$

Se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle para el intervalo $[-2,1]$, por lo que podemos afirmar que $\exists c\in(-2,1)/f'(c)=0$.

En efecto: $f'(x)=2x+1$ $\rightarrow$ $f'(x)=0$ $\rightarrow$ $2x+1=0$ $\rightarrow$ $x=\frac{-1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{-1}{2}\in(-2,1)$

La interpretación geométrica del teorema se entiende fácilmente. Entre los extremos a y b con $f(a)=f(b)$, se alcanza al menos un extremo relativo. Es decir, un punto con pendiente paralela al eje horizontal OX (**pendiente 0 = derivada nula**).

-------- $f(x)$ *arbitraria, con extremo relativo comprendido en el intervalo* (a,b)