

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 5 - rango de matriz por el método de Gauss

1. Sea $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) Estudiar el rango de la matriz en función del parámetro m .

b) Hallar el valor de m para que se cumpla la igualdad $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Aplicamos Gauss para estudiar el rango de la matriz, sabiendo que el rango coincide con el número de filas no nulas tras obtener la matriz triangular de Gauss.

Y si el rango coincide con la dimensión de la matriz (en este caso 3), admitirá inversa.

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = 2 \cdot F_3 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Igualamos a cero los elementos de la diagonal principal que dependen del parámetro.

$$m = 0$$

$$2m = 0 \rightarrow m = 0$$

Realizamos la discusión de casos.

• Si $m = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Eliminamos la tercera fila por tener todos los coeficientes nulos \rightarrow

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$
 Eliminamos una de las filas, por ser ambas idénticas $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$

Llegamos a una única fila con coeficientes no nulos \rightarrow El rango es 1.

- Si $m \neq 0 \rightarrow \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$ En la matriz final de Gauss contamos tres filas con coeficientes no nulos \rightarrow Rango es 3.

b) Para comprobar $A^2=4$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ realizamos en primer lugar:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix}$$

E igualamos componente a componente:

$$\begin{pmatrix} m^2 & -2m+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+m & m^2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m^2=4 \\ -2m+4=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 4=4 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ -2+m=0 \\ m^2=4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{El valor } m=2 \text{ cumple las condiciones}$$