Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 7 - Grado numerador mayor o igual que grado del denominador

Grado del numerador P(x) mayor o igual que Grado del denominador Q(x)

Si dividimos el polinomio $P(x)$ entre $Q(x)$, obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si la división es exacta, el resto es cero → $R(x)=0$ → La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$, que es inmediata.

Si la división no es exacta → $R(x)\neq 0$ → La integral de la división de polinomios queda reducida a la integral de un polinomio $C(x)$ más la integral del cociente $\frac{R(x)}{Q(x)}$. Y el grado del resto $R(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, por lo que estaremos ante uno de los casos desarrollados en el apartado anterior: división de polinomios con grado en el numerador menor que el grado en el denominador.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1 resuelto

$\int \frac{x^3+3}{x^2-1}dx$ → Hacemos la división de polinomios

Dividendo (numerador) → x^3+3

Divisor (denominador) → x^2-1

$$\begin{array}{r|l} x^3+3 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x & x \\ \hline x+3 & \end{array}$$

Cociente → x

Resto → $x+3$

$$\frac{x^3+3}{x^2-1}=x+\frac{x+3}{x^2-1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{x^3+3}{x^2-1}dx=\int \left(x+\frac{x+3}{x^2-1}\right)dx=\int x\,dx+\int \frac{x+3}{x^2-1}dx$$

Es decir, hemos convertido la integral de partida en la suma de dos integrales (una polinómica y otra un cociente de polinomios, con el grado del numerador menor que el grado del denominador).

$$\int x\,dx+\int \frac{x+3}{x^2-1}dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1} \quad \rightarrow \quad x+3=A(x-1)+B(x+1)$$

si $x=1 \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$

si $x=-1 \quad \rightarrow \quad 2=-2A \quad \rightarrow \quad A=-1$

$$\frac{x^2}{2}+\int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{-1}{x+1}dx+\int \frac{2}{x-1}dx=\frac{x^2}{2}-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+C$$