

Matematikuppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
Antagningsprov svarsform																	b															
Ma/Fy	CTH	KTH	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd	abcd											del C
2024	SU	GU	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	delA	A,1p	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	B,2p	delB	5p

17. Ekvationen $x^2 + bx + c = 0$, där koefficienterna b och c är reella tal, har lösningarna $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{23}}{2}$. Man kan då dra slutsatsen att

- (a) både b och c är heltal; (b) minst ett av talen b och c inte är ett heltal;
(c) varken b eller c är heltal; (d) inget av (a)-(c).

17. Ekvationen $x^2 + bx + c = 0$, där koefficienterna b och c är reella tal, har lösningarna

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{23}}{2}$. Man kan då dra slutsatsen att

- (a) både b och c är heltal (b) minst ett av talen b och c inte är ett heltal
(c) varken b eller c är heltal (d) inget av (a)-(b)-(c)

Lösning:

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{har lösningarna} \quad x = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2}$$

vilket ger $\frac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot c}}{2} = \frac{\sqrt{23}}{2}$, förenklat $b^2 - 4 \cdot c = 23$ och $c = \frac{b^2 - 23}{4}$

(a) kan motbevisas genom motexempel: $b = 5$ (heltal) ger

$$c = \frac{5^2 - 23}{4} = \frac{25 - 23}{4} = \frac{2}{4} = 0,5 \quad (\text{ej heltal})$$

(b) är sant, kan bevisas genom exempel? - för (d) utesluts ju då...

Det finns inga heltal x där $x^2 - 23$ är exakt delbart med 4, eftersom x^2 inte kan motsvara 3 mod 4.

(c) kan motbevisas genom samma motexempel som i (a) $b = 5$ och $c = 0,5$

... men det är förstås MÖJLIGT att varken b eller c är heltal, exempel:

$$c = \frac{b^2 - 23}{4} \quad \text{med } b = 6,7 \quad \text{ger} \quad c = \frac{6,7^2 - 23}{4} = 5,4725$$

utveckling av alternativ (b) , att minst ett av talen b och c inte är ett heltal :

Vi börjar med att ställa upp villkoret $b^2 - 23 \equiv 0 \pmod{4}$

Det skulle innebära att $b^2 \equiv 23 \pmod{4}$ och då att $b^2 \equiv 3 \pmod{4}$

nu undersöker vi vilka kvadrater som är möjliga mod 4

Om $b \equiv 0 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 0 \pmod{4}$

Om $b \equiv 1 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Om $b \equiv 2 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 4 \equiv 0 \pmod{4}$

Om $b \equiv 3 \pmod{4}$, då är $b^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$

Från ovanstående ser vi att b^2 aldrig kan vara $3 \pmod{4}$, vilket innebär att det inte finns något heltal b där $b^2 \equiv 23$ är delbart med 4 .