

ESPACIO AFIN

Índice:

1. Espacio afín-----	2
2. Ecuaciones de la recta-----	5
3. Ecuaciones del plano-----	8
4. Ecuaciones canónicas del plano. Ecuaciones especiales-----	11
5. Determinación de un plano-----	12
6. Posición relativa de dos rectas-----	13
7. Posición relativa de una recta un plano-----	17
8. Posición relativa de dos planos-----	19
9. Posición relativa de tres planos-----	21
10. Haz de rectas-----	24
11. Radiación de rectas-----	25
12. Haz de planos-----	25
13. Posiciones relativos de la recta y el plano con la esfera-----	27

1. Espacio afín A_3

El **espacio vectorial de vectores libres en el espacio** $\{\vec{v}=(v_1, v_2, v_3): v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3\}$, con las operaciones de suma de vectores y producto de un número real por un vector, lo denominamos por V^3 y al **conjunto de puntos en el espacio** $\mathbb{R}^3$.

Denominamos origen de $\mathbb{R}^3$ al punto fijo $O=(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, y para cada punto $X=(x_1, x_2, x_3)$, determinará junto con O el vector libre $\overrightarrow{OX}=(x_1, x_2, x_3)$, denominado **vector de posición de X** .

Recíprocamente, cada vector $\overrightarrow{OX}=(x_1, x_2, x_3)$, representante del vector libre o clase $\{\overrightarrow{OX}\}^{-1}$, determina un punto $X=(x_1, x_2, x_3)$.

Esta biyección entre puntos X y vectores $\overrightarrow{OX}$ nos permite localizar un punto mediante su vector de posición, pudiendo así actuar sobre los puntos trabajando con sus vectores de posición.

Llamaremos **espacio afín**, y lo expresamos por A_3 a la terna $(\mathbb{R}^3, V^3, f)$, donde f es la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow V^3 \\ (A, B) &\rightarrow f(A, B) = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Que verifica las propiedades:

1.- fijado un punto $A \in \mathbb{R}^3$, la aplicación

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{R}^3 &\rightarrow V^3 \\ B &\rightarrow f_A(B) = \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva².

2.- $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$$f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$$

¹ $\{\overrightarrow{OX}\}^{-1}$ = conjunto de vectores libres equipolentes al vector $\overrightarrow{OX}$

² En el caso particular de $A = O$, obtenemos los vectores de posición del espacio.

☞ Otra definición alternativa de **espacio afín**, es usando la suma de puntos y vectores, y lo expresamos por A_3 mediante la terna $(\mathbb{R}^3, V^3, g)$, donde g es la siguiente aplicación

$$g: \mathbb{R}^3 \times V^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (A, \vec{v}) \rightarrow g(A, \vec{v}) = A + \vec{v}$$

Que verifica las propiedades:

$$1.- \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{v} \in V^3, \text{ tal que } B = g(A, \vec{v}) = A + \vec{v}$$

$$2.- \quad \forall A \in \mathbb{R}^3 \text{ y } \forall \vec{v}, \vec{w} \in V^3 \text{ se cumple}$$

$$(A + \vec{v}) + \vec{w} = g(g(A + \vec{v}), \vec{w}) = g(A + (\vec{v} + \vec{w})) = A + (\vec{v} + \vec{w})$$

Llamamos **sistema de referencia de un espacio afín** A_3 al conjunto $S = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, donde O es el origen y $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de V^3 .

Al punto O se le denomina **origen de coordenadas** y a las rectas que determinan los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y que pasan por O, **ejes de coordenadas**.

Las **coordenadas cartesianas** de un punto cualquiera A de A_3 son la terna de números reales (a, b, c) tal que verifica:

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

Como podemos tomar como base del espacio vectorial V^3 , la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, en el resto del tema, si no se especifica lo contrario el sistema de referencia vendrá dado por

$$S = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

Ejemplo.- La coordenadas del vector de posición del punto A respecto de la base canónica son $\vec{OA} = (3, 2, -1)$. Vamos a calcular las coordenadas cartesianas de A respecto del sistema de referencia $S' = \{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, donde $O = (0,0,0)$, $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (1,1,0)$ y $\vec{w} = (0,0,1)$,

Como por definición

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} \quad \Leftrightarrow \quad (3, 2, -1) = a \cdot (1,0,0) + b \cdot (1,1,0) + c \cdot (0,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a + b \\ 2 = b \\ -1 = c \end{cases} \Leftrightarrow (a, b, c) = (1, 2, -1)$$

Coordenadas de un vector $\overrightarrow{AB}$

Dados dos puntos $A=(a_x, a_y, a_z)$ y $B=(b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$ respecto de un sistema de referencia $S=\{O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, teniendo en cuenta que las coordenadas de A y B, coinciden con las coordenadas de los vectores de posición $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ respectivamente, las coordenadas del vector pueden $\overrightarrow{AB}$ calcularse mediante la expresión

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_x, b_y, b_z) - (a_x, a_y, a_z) = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

Si $M=(m_x, m_y, m_z)$ es el punto medio del segmento $[A, B]$, resolviendo la igualdad

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow (m_x, m_y, m_z) &= \left(\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2}, \frac{a_z + b_z}{2} \right) \end{aligned}$$

Ejemplo.- Hallar las coordenadas del punto medio M del segmento $[\overrightarrow{AB}]$, donde $A(2,4,1)$ y $B(8,6,4)$,

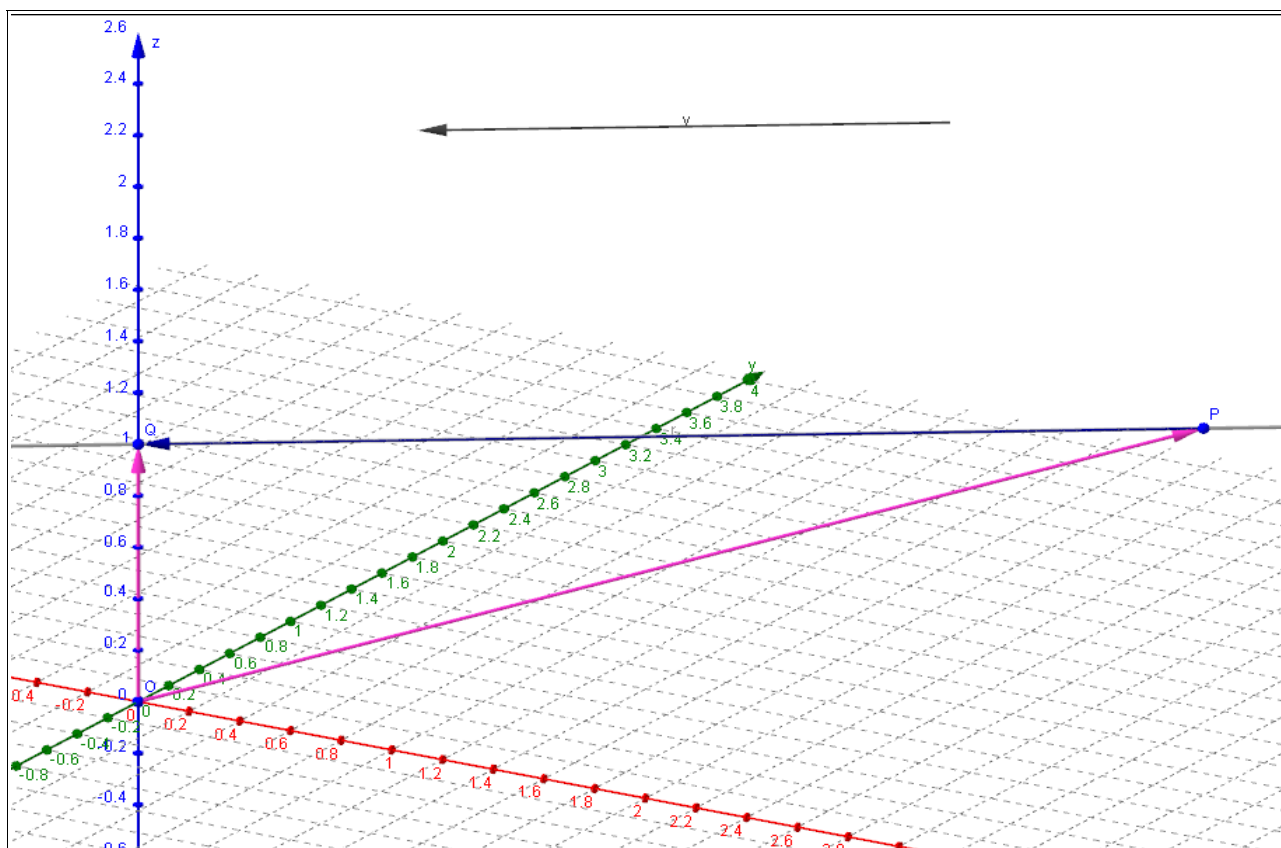
Como M divide a $\overrightarrow{AB}$ en dos partes iguales, se tiene que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = (2,4,1) + \frac{1}{2} \cdot (6,2,3) = \left(5, 5, \frac{5}{2} \right)$$

Luego, las coordenadas de M son $\left(5, 5, \frac{5}{2} \right)$

2. Ecuaciones de la recta

Sea $P(a, b, c)$ un punto de la recta r , $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ un vector no nulo que tiene la misma dirección que r , y $X(x, y, z)$ un punto cualquiera de la recta.



Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{PX}$ es paralelo a $\vec{v}$, existirá un número real λ tal que $\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{v}$ y como $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$, se cumplirá:

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA r

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v}; \lambda \in \mathbb{R}^3$$

Siendo $\overrightarrow{OP}$ el vector de posición del punto P de r y $\vec{v}$, un vector en la misma dirección que r , llamado **vector director** de la recta r .

Como podemos tomar cualquier vector $\vec{v}$ con la misma dirección que r , podemos obtener ecuaciones vectoriales de r con expresiones distintas, que representan la misma recta r .

- 3 Algunas veces en vez de conocer $\vec{v}$, conocemos dos puntos de la recta P y Q , y la ecuación vectorial quedaría como $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ}; \lambda \in \mathbb{R}$

Si utilizamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{OX}; \overrightarrow{OP}; \vec{v}$, la ecuación vectorial de la recta r , quedará como

$$(x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow (x, y, z) = (a + \lambda \cdot v_1, b + \lambda \cdot v_2, c + \lambda \cdot v_3)$$

Que igualando las coordenadas, se obtiene:

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA r

$$\begin{cases} x = a + \lambda \cdot v_1 \\ y = b + \lambda \cdot v_2 \\ z = c + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Eliminando el parámetro λ de las tres ecuaciones e igualando, se obtiene:

ECUACIÓN CONTINUA DE LA RECTA r

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} = \frac{z-c}{v_3}$$

Ejemplo.- La recta que pasa por el punto $P(1,0,-2)$ y tiene como vector director $\vec{v} = (2,3,-1)$. Tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + \lambda \cdot (2, 3, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Y como ecuación continua

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{(-1)}$$

De las tres igualdades de la ecuación continua de la recta r , que interviene en la ecuación, podemos obtener tres ecuaciones distintas, pero dado que solamente dos de ellas son independientes, tomando dos de estas igualdades y desarrollándolas, por ejemplo

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{y-b}{v_2} \Rightarrow v_2 x - v_1 y - v_2 a + v_1 b = 0$$

$$\frac{x-a}{v_1} = \frac{z-c}{v_3} \Rightarrow v_3 x - v_1 z - v_3 a + v_1 c = 0$$

Que tomando

$$A = v_2, A' = v_3, B = -v_1, D = -v_2 a + v_1 b, D' = -v_3 a + v_1 c$$

Obtenemos:

ECUACIONES IMPLÍCITAS DE LA RECTA r

$$A x + B y + D = 0$$

$$A' x + B z + D' = 0$$

Además, al igual que a partir de las ecuaciones paramétricas de una recta r , podemos obtener las ecuaciones implícitas, a partir de las ecuaciones implícitas, tomando una variable como parámetro, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r ,

Ejemplo.- Las ecuaciones implícitas de la recta r son

$$x + y - 2z = 3$$

$$x - y + 4z = 5$$

Para hallar las ecuaciones paramétricas, realizando por ejemplo el cambio $z = \lambda$, obtenemos

$$x + y = 3 + 2\lambda$$

$$x - y = 5 - 4\lambda$$

Y resolviendo el sistema de incógnitas x e y , obtenemos las ecuaciones paramétricas de r

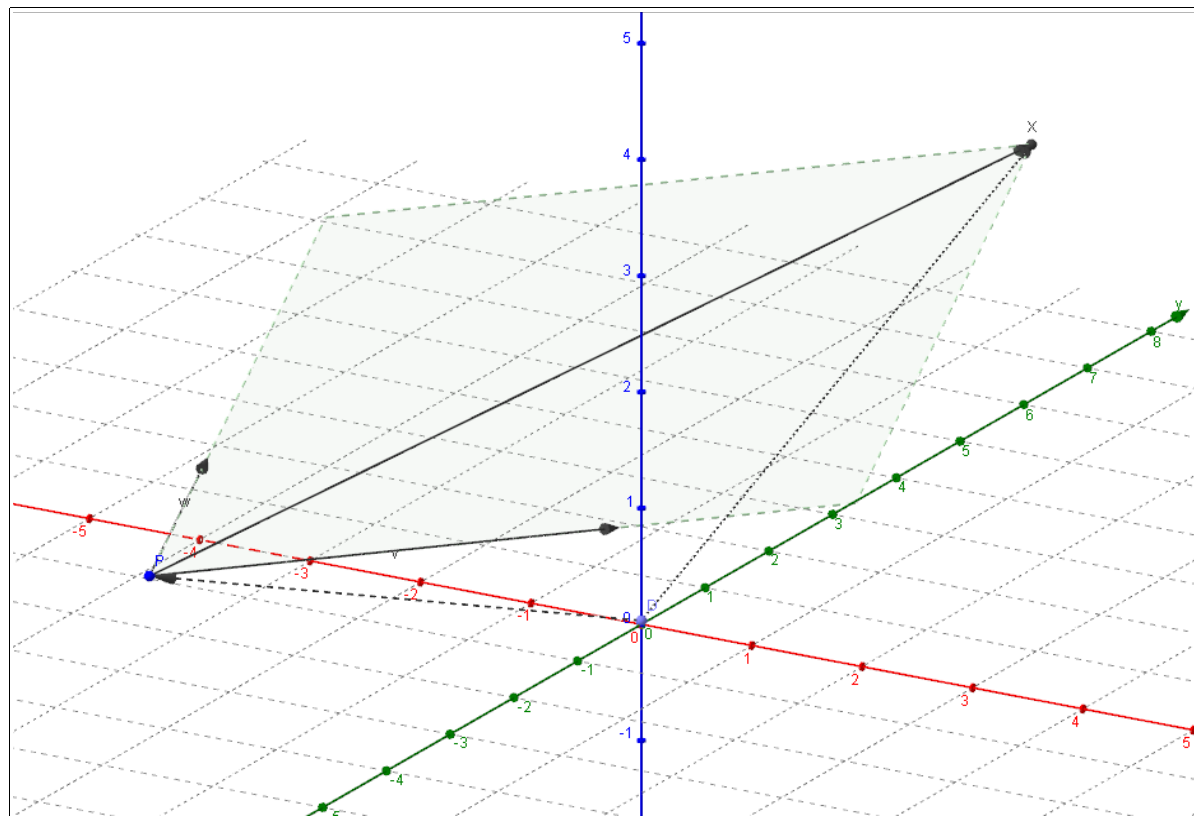
$$x = 4 - \lambda$$

$$y = -1 + 3\lambda$$

$$z = \lambda$$

3. Ecuaciones del plano

Sea $P(a, b, c)$ un punto del plano π , $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w}=(w_1, w_2, w_3)$ dos vectores no nulos, independientes entre sí y $X(x, y, z)$ un punto cualquiera del plano.



Teniendo en cuenta que podemos tomar $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de forma que el origen estén en el punto P, como existirán $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tal que $\overrightarrow{PX} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ es paralelo a $\vec{v}$, y teniendo en cuenta que $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$, se cumplirá:

ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO π

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}^4$$

Siendo $\overrightarrow{OP}$ el vector de posición del punto P de π y $\vec{v}$, $\vec{w}$ dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano π

4 Algunas veces en vez de conocer $\vec{v}, \vec{w}$ conocemos tres puntos no alineados del plano P, Q y R, y la ecuación vectorial quedaría como

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} + \mu \cdot \overrightarrow{PR}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Como podemos tomar cualquier par de vectores $\vec{v}, \vec{w}$ linealmente independientes y paralelos a π , podemos obtener ecuaciones vectoriales de π con expresiones distintas, que representan el mismo plano π .

Si utilizamos las coordenadas de los vectores $\vec{OX}; \vec{OP}; \vec{v}; \vec{w}$, la ecuación vectorial del plano π , quedará como

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (a, b, c) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3) + \mu \cdot (w_1, w_2, w_3) \\ \Leftrightarrow (x, y, z) &= (a + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1, b + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2, c + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3)\end{aligned}$$

Que igualando las coordenadas, se obtiene:

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DEL PLANO π

$$\begin{cases} x = a + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y = b + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z = c + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Para cada valor λ y μ , se obtiene un punto del plano, y recíprocamente para cada punto del plano $X(x, y, z)$ del plano determina un valor λ y μ

Para eliminar los parámetros λ y μ de las tres ecuaciones, consideramos el sistema de ecuaciones de variables λ y μ

$$\begin{aligned}x &= a + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y &= b + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z &= c + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3\end{aligned}$$

Cuya matriz y matriz ampliada del sistema, son respectivamente

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_a = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & x-a \\ v_2 & w_2 & y-b \\ v_3 & w_3 & z-c \end{pmatrix}$$

Que teniendo en cuenta que para cada punto $X(x, y, z)$ del plano π , el sistema tiene solución única, por el teorema de Rouché, se cumplirá $\text{Rango } M = \text{Rango } M_a$. Y obtenemos la ecuación

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x-a \\ v_2 & w_2 & y-b \\ v_3 & w_3 & z-c \end{vmatrix} = 0$$

Que desarrollando este determinante, simplificando e igualando a cero, será

$$(v_2 w_3 - v_3 w_2)x + (v_3 w_1 - v_1 w_3)y + (v_1 w_2 - v_2 w_1)z + v_1(w_3 b - w_2 c) + v_2(w_1 c - w_3 a) + v_3(w_2 a - w_1 b) = 0$$

Que denominando

$$A = v_2 w_3 - v_3 w_2$$

$$B = v_3 w_1 - v_1 w_3$$

$$C = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

$$D = v_1(w_3 b - w_2 c) + v_2(w_1 c - w_3 a) + v_3(w_2 a - w_1 b)$$

obtendremos:

ECUACIONES IMPLÍCITAS DEL PLANO π

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ejemplo.- Las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P(2,3,1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,2,4)$ y $\vec{w}=(1,2,1)$ son:

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 3 + 2 \cdot \lambda + 2 \cdot \mu \\ z = 1 + 4 \cdot \lambda + \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Y sus ecuaciones implícitas son:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-2 \\ 2 & 2 & y-3 \\ 4 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x + 5y - 4z + 1 = 0$$

Ejemplo.- Las ecuaciones paramétricas de un plano son

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = 1 - 3 \cdot \lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Para averiguar si el punto $P(0,3,0)$ pertenece a este plano, sustituimos las coordenadas de P por las ecuaciones del punto X , y estudiamos si el sistema es compatible

$$0 = 1 + \lambda - \mu$$

$$3 = 2 - \lambda + \mu$$

$$0 = 1 - 3 \cdot \lambda - \mu$$

Que resolviendo, se obtiene $\lambda=0$ y $\mu=1$, por lo que $P \in \pi$

4. Ecuación canónica del plano. Planos especiales

Al situar un plano en el espacio afín, será de utilidad conocer los puntos en los que el plano corta a los ejes de coordenadas.

Para calcular los puntos P_x, P_y y P_z de corte de un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, con los ejes OX, OY y OZ respectivamente

Si hacemos $y = z = 0$, y obtenemos $Ax + D = 0$, luego $P_x = \left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$

Si hacemos $x = z = 0$, y obtenemos $By + D = 0$, luego $P_y = \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$

Si hacemos $x = y = 0$, y obtenemos $Cz + D = 0$, luego $P_z = \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$

Y denominando $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}$ y $c = -\frac{D}{C}$, la ecuación del plano π , queda como

$$\pi: -\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0 \Rightarrow \frac{D}{a}x + \frac{D}{b}y + \frac{D}{c}z = D$$

Que dividiendo ambos miembros de la ecuación por D, obtenemos

ECUACIÓN CANÓNICA O SEMENTARIA DEL PLANO π

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Donde a, b, y c son las longitudes de los segmentos que determina el plano π al cortar los ejes X, Y y Z en los puntos $(a, 0, 0), (0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$.

Ejemplo.- El como plano $\pi: x + 2y + 4z - 4 = 0$ cumple:

Si $y = z = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ y el punto $(4, 0, 0) \in \pi$

Si $x = y = 0 \Rightarrow 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$ y el punto $(0, 2, 0) \in \pi$

Si $x = z = 0 \Rightarrow 4z - 4 = 0 \Rightarrow z = 1$ y el punto $(0, 0, 1) \in \pi$

Luego:

$$a = 4, b = 2, c = 1$$

Y su ecuación canónica es

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$$

Si en la ecuación implícita de un plano no aparece alguna de las incógnitas, significa que el plano no corta el eje coordenado correspondiente a dicha incógnita. Por tanto el plano es paralelo a dicho eje.

Ejemplos

- El plano $x - 2y + 4 = 0$ es paralelo al eje Z
- El plano $3y + 9 = 0$ es paralelo a los ejes X y Z y, por tanto, paralelo al plano XZ determinado por dichos ejes.

5. Determinación de un plano

Podemos encontrar las ecuaciones de un plano con los siguientes datos:

- Un punto y dos vectores independientes paralelos al plano, ya estudiado en apartados anteriores
- Tres puntos A , B y C no alineados.
- Una recta r y un punto exterior a ella.

Ejemplos.-

- Dados los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,-1,1)$ y $C(2,3,1)$, vamos a hallar la ecuación del plano que determinan, Sean $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -1)$, su ecuación implícita viene dada por:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x-1 \\ -1 & 3 & y \\ -1 & -1 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - y + z - 6 = 0$$

- Dados los puntos $A(1,0,2)$ y la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, para hallar la ecuación del plano que contiene a A y r , tomamos el punto $B(1,-1,0)$ y formamos el vector $\vec{v}(2,1,-1)$, utilizando el determinante para calcular su ecuación implícita, llegamos a la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & x-1 \\ -1 & 1 & y+1 \\ -2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 4y + 2z - 7 = 0$$

Llamamos **puntos coplanarios** a los puntos que pertenecen a un mismo plano,

Cuatro puntos A, B, C y D son coplanarios si y solo si $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ son linealmente independientes, es decir si $\text{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.

6. Posición relativa de dos rectas

Sean r y s dos rectas de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = a + \lambda \cdot v_1 \\ y = b + \lambda \cdot v_2 \\ z = c + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x = a' + \mu \cdot t_1 \\ y = b' + \mu \cdot t_2 \\ z = c' + \mu \cdot t_3 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Para hallar los puntos comunes de dichas rectas, igualamos los dos sistemas coordenada a coordenada y obtenemos el sistema de ecuaciones de incógnitas λ y μ

$$v_1 \cdot \lambda - t_1 \cdot \mu = a' - a$$

$$v_2 \cdot \lambda - t_2 \cdot \mu = b' - b$$

$$v_3 \cdot \lambda - t_3 \cdot \mu = c' - c$$

Que considerando la matriz asociada al sistema y la matriz ampliada;

$$M = \begin{pmatrix} v_1 - t_1 \\ v_2 - t_2 \\ v_3 - t_3 \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} v_1 - t_1 & a' - a \\ v_2 - t_2 & b' - b \\ v_3 - t_3 & c' - c \end{pmatrix}$$

Y considerando el teorema de Rouché, podemos determinar las posiciones relativas de las rectas, teniendo en cuenta la siguiente tabla

	$Rango M_a = 1$	$Rango M_a = 2$	$Rango M_a = 3$
$Rango M = 1$	Sistema compatible indeterminado r y s son COINCIDENTES	Sistema incompatible r y s son PARALELAS	
$Rango M = 2$		Sistema compatible determinado r y s se cortan en un punto	Sistema incompatible r y s se cruzan

En el caso de que $Rango M = rango M_a = 2$, para calcular el punto $P(x, y, z)$ de intersección de las rectas r y s , se calcula λ o μ del sistema de ecuaciones y sustituyendo en r o s respectivamente se halla el punto (x, y, z) donde se cortan dichas rectas.

Ejemplo.- Sean r y s dos rectas de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 3 \cdot \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones de incógnitas λ y μ

$$\lambda + \mu = 2$$

$$\lambda - \mu = 0$$

$$\lambda - 3 \cdot \mu = -2$$

Considerando la matriz asociada al sistema y la matriz ampliada;

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como, $\text{Rango } M = \text{rango } M_a = 2$, dichas rectas se cortan en un punto y podemos eliminar una ecuación (por ejemplo la tercera) y resolviendo el sistema obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 2 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 1$$

Y sustituyendo $\lambda = 1$ $\mu = 1$ en r o en s , obtenemos $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Otro método para conocer la posición relativa de dos rectas es estudiar el valor del determinante de la matriz ampliada:

- Si $\text{Determinante } M_a \neq 0$, las rectas se cruzan
- Si $\text{Determinante } M_a = 0$, debemos estudiar si los vectores directores de las rectas son proporcionales
 - Si no son proporcionales, las rectas se cortan en un punto
 - Si son proporcionales, tomando un punto cualquiera de una recta y sustituyéndolo en la otra, de forma que si verifica su ecuación, son coincidentes, y si no la verifica, son paralelas

Ejemplo.- Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s de ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} x=1-2.\lambda \\ y=2+4.\lambda \\ z=2.\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x=-2+\mu \\ y=1-2.\mu \\ z=-1-\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Consideramos el determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones de incógnitas

λ y μ

$$\begin{aligned} -2.\lambda - \mu &= -3 \\ 4.\lambda + 2.\mu &= -1 \\ 2\lambda + \mu &= -1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_a = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\text{Determinante } M_a = 0$$

Las rectas r y s no se cruzan. Y dado que los vectores directores de las rectas son proporcionales, ya que

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{2}{-1}$$

Tomamos un punto cualquiera de una recta, por ejemplo el punto $P(1,2,0)$ que pertenece a la recta r , y al sustituirlo en s , comprobamos que no pertenece a s , ya que

$$\begin{aligned} 1 &= -2 + \mu & \mu &= 3 \\ 2 &= 1 - 2.\mu & \Rightarrow \mu &= -\frac{1}{2} \\ 0 &= -1 - \mu & \mu &= -1 \end{aligned}$$

Luego, las rectas r y s son paralelas.

En el caso de que dos rectas r y s vengan dadas por sus ecuaciones implícitas (como intersección de dos planos), es decir de la forma:

$$\begin{aligned} r: & \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \\ s: & \begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas, consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}Ax + By + Cz + D &= 0 \\A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \\A'''x + B'''y + C'''z + D''' &= 0\end{aligned}$$

Cuya matriz asociada y matriz ampliada correspondientes son:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Y considerando el teorema de Rouché, podemos determinar las posiciones relativas de las rectas, teniendo en cuenta la siguiente tabla

	$\text{Rango } M_a = 2$	$\text{Rango } M_a = 3$	$\text{Rango } M_a = 4$
$\text{Rango } M = 2$	Sistema compatible indeterminado r y s son COINCIDENTES	Sistema incompatible r y s son PARALELAS	
$\text{Rango } M = 3$		Sistema compatible determinado r y s se cortan en un punto	Sistema incompatible r y s se cruzan

En el caso de que $\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 3$, para calcular el punto $P(x, y, z)$ de intersección de r y s, basta con que calculemos la solución x, y, z del sistema de ecuaciones.

Ejemplo.- Sean las rectas

$$r: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas, tomamos la matriz asociada y ampliada, relativa al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las dos rectas:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculado los rangos de las dos matrices, como tenemos que

$$\text{Rango } M = 3 \quad \text{y} \quad \text{Rango } M_a = 4$$

las dos rectas r y s se cruzan

7. Posición relativa de una recta y un plano

Sean π y r un plano y una recta respectivamente, cuyas ecuaciones son:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \qquad r: \begin{cases} x = a + \lambda \cdot v_1 \\ y = b + \lambda \cdot v_2 \\ z = c + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo las coordenadas x, y, z de la recta en el plano, obtenemos

$$A \cdot (a + \lambda \cdot v_1) + B \cdot (b + \lambda \cdot v_2) + C \cdot (c + \lambda \cdot v_3) + D = 0$$

Que operando y reagrupando términos será

$$(A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3) \cdot \lambda + (A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D) = 0$$

Y denominando

$$R = A \cdot v_1 + B \cdot v_2 + C \cdot v_3; \quad S = A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D$$

Quedará la ecuación

$$R \cdot \lambda + S = 0$$

De la cual podemos deducir la posición relativa de π y r , teniendo en cuenta

- Si $R \neq 0$, de la ecuación $R \cdot \lambda + S = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{S}{R}$, y se cumplirá que π y r se cortan en un punto $P(x, y, z)$. Para calcular las coordenadas x, y, z , sustituimos el valor $\lambda = -\frac{S}{R}$, en la ecuación de la recta r .
- Si $R = 0$ y $S \neq 0$, de la ecuación $R \cdot \lambda + S = 0 \Rightarrow S = 0$, que es una contradicción, luego no podemos encontrar ningún valor λ que verifique la ecuación, y por tanto π y r son paralelos.
- Si $R = S = 0$, la ecuación $0 \cdot \lambda + 0 = 0$ se cumple para cualquier valor λ , luego los puntos comunes del plano π y de la recta r , son todos los puntos de la recta r , es decir la recta r está contenida en el plano π .

Ejemplo.- Sean π y r el plano y la recta de ecuaciones:

$$\pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo las coordenadas x, y, z de la recta en el plano, obtenemos

$$(2 + \lambda) - 2 \cdot (1 + \lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 0 \cdot \lambda + 0 = 0$$

Luego $R = S = 0$, y la recta r está contenida en el plano π .

En el caso de que el plano π y la recta r vengan dadas por sus ecuaciones implícitas, es decir de la forma:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$r: \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas, consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \end{aligned}$$

Cuya matriz asociada y matriz ampliada correspondientes son:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Y considerando el teorema de Rouché, podemos determinar las posiciones relativas del plano π y la recta r , teniendo en cuenta la siguiente tabla

	$Rango M_a = 2$	$Rango M_a = 3$
$Rango M = 2$	Sistema compatible indeterminado la recta r está contenida en el plano π	Sistema incompatible la recta r y el plano π son paralelos
$Rango M = 3$		Sistema compatible determinado la recta r y el plano π se cortan en un punto

En el caso de que $Rango M = rango M_a = 3$, para calcular el punto $P(x, y, z)$ de intersección de la recta r y el plano π , basta con que calculemos la solución x, y, z del sistema de ecuaciones.

Ejemplo.- Sean la recta r y el plano π de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad \pi: x + 3y - 4z + 5 = 0$$

Para estudiar la posición relativa, tomamos la matriz asociada y ampliada, relativa al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, como tenemos que

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 2$$

la recta r está contenida en el plano π .

8. Posición relativa de dos planos

Sean π y π' dos planos, cuyas ecuaciones son:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Para estudiar la posición relativa de los dos planos, consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}$$

Cuya matriz asociada y matriz ampliada correspondientes son:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}; \quad M_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

Y considerando el teorema de Rouché, podemos determinar las posiciones relativas de los planos π y π' , teniendo en cuenta la siguiente tabla

	$\text{Rango } M_a = 1$	$\text{Rango } M_a = 2$
$\text{Rango } M = 1$	Sistema compatible indeterminado los planos π y π' son coincidentes	Sistema incompatible los planos π y π' son paralelos
$\text{Rango } M = 2$		Sistema compatible indeterminado los planos π y π' se cortan en una recta

Ejemplo.- Sean los planos π y π' de ecuaciones

$$\pi: x-2y+x-1=0$$

$$\pi': 2x-4y+3z-2=0$$

Para estudiar la posición relativa de los dos planos, tomamos la matriz asociada y ampliada, relativa al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, como tenemos que

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 2$$

tenemos que los dos planos se cortan en una recta.

Ejemplo.- Sean los planos π y π' de ecuaciones

$$\pi: x-2y+x-1=0$$

$$\pi': -2x+4y-2z+3=0$$

Para estudiar la posición relativa de los dos planos, tomamos la matriz asociada y ampliada, relativa al sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los dos planos:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, como tenemos que

$$\text{Rango } M = 1 \text{ y } \text{Rango } M_a = 2$$

tenemos que los dos planos son paralelos.

Ejemplo.- Sean los planos π y π' de ecuaciones

$$\pi: x-2y+z-1=0$$

$$\pi': ax-4y+2z+b=0$$

Vamos a calcular para que valores de a y b , son planos paralelos. Para que sean paralelos, se tiene que cumplir:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & -4 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ a & -4 & 2 & b \end{pmatrix} = 2$$

Que equivale a que se cumpla

$$\frac{1}{a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{-b}$$

Es decir

$$a = 2 \text{ y } b \neq -2$$

Ejemplo.- Sean los planos π y π' de ecuaciones

$$\pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

$$\pi': -3x + 6y - 3z + 3 = 0$$

Para estudiar su posición relativa, teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

Se tiene que los dos planos son coincidentes.

9. Posición relativa de tres planos

Sean π, π', π'' tres planos de ecuaciones:

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\pi'': A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas, consideramos el sistema de ecuaciones:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Cuya matriz asociada y matriz ampliada correspondientes son:

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

$$M_a = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Y considerando el teorema de Rouché, podemos determinar las posiciones relativas de los tres planos, teniendo en cuenta la siguiente tabla

	$Rango M_a = 1$	$Rango M_a = 2$	$Rango M_a = 3$
$Rango M = 1$	Sistema compatible indeterminado los planos π, π', π'' son coincidentes	Sistema compatible indeterminado los planos π, π', π'' no tiene ningún punto en común • Si dos filas de M_a son proporcionales, dos planos son coincidentes y el otro paralelo. • En otro caso los tres planos son paralelos	
$Rango M_a = 2$		Sistema compatible indeterminado los planos π, π', π'' se cortan en una recta • Si dos filas de M_a son proporcionales, dos planos son coincidentes y el otro plano los corta en una recta • En otro caso los tres planos se cortan en una recta	Sistema compatible indeterminado los planos π, π', π'' no tiene ningún punto en común • Si dos filas de M son proporcionales, dos planos son paralelos y el otro plano corta a cada plano en una recta • En otro caso los tres planos se cortan tres rectas (dos a dos)
$Rango M = 3$			Sistema compatible determinado los planos π, π', π'' se cortan en un punto

En el caso de que $Rango M = rango M_a = 3$, para calcular el punto $P(x, y, z)$ de intersección de los planos π, π', π'' , basta con que calculemos la solución x, y, z del sistema de ecuaciones.

Ejemplo.- Sean los planos π, π', π'' de ecuaciones

$$\pi: x + 2y - 2z + 3 = 0$$

$$\pi': 2x - y + 3z + 1 = 0$$

$$\pi'': -2x - 4y + 4z - 6 = 0$$

Para estudiar la posición relativa de los planos, consideramos la matriz asociada y matriz ampliada del sistema de ecuaciones, que son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, el sistema es compatible, ya que

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 2$$

Además, como la primera y la tercera fila de la matriz ampliada son proporcionales, tenemos que π y π'' son planos coincidentes que se contar en una recta con π' .

Ejemplo.- Sean los planos π, π', π'' de ecuaciones

$$\pi: -x + y - z + 1 = 0$$

$$\pi': 2x + 3y + 4z - 3 = 0$$

$$\pi'': -3x - 2y - 5z + 4 = 0$$

Para estudiar la posición relativa, consideramos la matriz asociada y matriz ampliada del sistema de ecuaciones, que son:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, el sistema es compatible, ya que

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 2$$

Además, ninguna de las filas de la matriz ampliada son proporcionales, tenemos que los tres planos se cortan en una recta.

Ejemplo.- Sean los planos π, π', π'' de ecuaciones

$$\pi: 2x + y + 3 = 0$$

$$\pi': x - y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi'': 2x + 3y - 2 = 0$$

Para estudiar la posición relativa, consideramos la matriz asociada y matriz ampliada del sistema de ecuaciones, que son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculando los rangos de las dos matrices, el sistema es compatible determinado, ya que

$$\text{Rango } M = \text{Rango } M_a = 3$$

Que resolviendo el sistema, obtenemos por solución el punto

$$P(x, y, z) = P\left(-\frac{7}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}\right)$$

10. Haz de rectas en un plano

En el plano afín XY

- Un **haz de rectas que pasa por el punto** $A(x_0, y_0)$ tiene por ecuación

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0); m \in \mathbb{R}$$

Para cada valor m obtenemos una recta que pasa por A, salvo la recta $x = x_0$, que al ser vertical, su pendiente es infinita.

- Un **haz de rectas paralelas** $A(x_0, y_0)$ tiene por ecuación

$$y = m \cdot x + b; b \in \mathbb{R}$$

En el espacio afín E_3

- Un **haz de rectas que pasa por el punto** $A(a, b, c)$ y se apoya en una recta

$$r: \begin{cases} x = a' + \lambda \cdot v_1 \\ y = b' + \lambda \cdot v_2 \\ z = c' + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

tiene por ecuación

$$\frac{x - a}{a' + \lambda \cdot v_1 - a} = \frac{y - b}{b' + \lambda \cdot v_2 - b} = \frac{z - c}{c' + \lambda \cdot v_3 - c}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ya que si $P(a' + \lambda \cdot v_1, b' + \lambda \cdot v_2, c' + \lambda \cdot v_3)$ es un punto cualquiera de la recta r , y podemos obtener los puntos de r dándoles valores a λ . Por tanto:

$$\overrightarrow{AP} = (a' + \lambda \cdot v_1 - a, b' + \lambda \cdot v_2 - b, c' + \lambda \cdot v_3 - c)$$

es es el vector director de dicha rectas, cuya ecuación continua será:

$$\frac{x-a}{a' + \lambda \cdot v_1 - a} = \frac{y-b}{b' + \lambda \cdot v_2 - b} = \frac{z-c}{c' + \lambda \cdot v_3 - c}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo.- Sea el punto $A(1, 2, -1)$ y la recta $r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.

El haz de rectas que pasa por A y se apoya en r , tendrá de ecuación continua:

$$\frac{x-1}{\lambda} = \frac{y-2}{-3+\lambda} = \frac{z+1}{3-\lambda}; \lambda \in \mathbb{R}$$

11. Radiación de rectas

Teniendo en cuenta que cualquier vector en el espacio $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es proporcional al vector $\left(1, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}\right) = (1, n, p)$, la rectas del espacio que pasan por un punto $A(a, b, c)$ (radiación de rectas que pasan por A), tendrán por ecuación continua

$$\frac{x-a}{1} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}; n, p \in \mathbb{R}$$

Ejemplo.- La radiación de rectas que pasa por el punto $A(-2, 1, 4)$ tiene por ecuación continua

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-4}{p}; n, p \in \mathbb{R}$$

12. Haz de planos

Un haz de planos paralelos tiene por ecuación

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + k = 0; k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo.- Dado el plano $\pi: 2 \cdot x - y + 3 \cdot z - 8 = 0$. la ecuación de planos paralelos a π tiene por ecuación

$$2 \cdot x - y + 3 \cdot z + k = 0; k \in \mathbb{R}$$

Si queremos conocer la ecuación de un plano de dicho haz que pase por el punto $A(2,3,-1)$, basta con sustituir las coordenadas de A en la ecuación del haz y obtener el valor k , es decir

$$2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot (-1) + k = 0 \Rightarrow k = 2$$

Luego el plano será

$$2 \cdot x - y + 3 \cdot z + 2 = 0$$

- Sea la recta dada por sus ecuaciones implícitas $r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$.

Un **haz de planos que se cortan en la recta r** tiene por ecuación

$$\alpha \cdot (Ax + By + Cz + D) + \beta \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si $\alpha \neq 0$, tomando $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, podemos transformar la ecuación en

$$(Ax + By + Cz + D) + \lambda \cdot (A'x + B'y + C'z + D') = 0; \lambda \in \mathbb{R}$$

Que contiene a todos los planos, salvo al plano $A'x + B'y + C'z + D' = 0$, que se obtiene cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

Ejemplo.- Consideremos la recta $r: \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$, la ecuación del haz de planos que se cortan en r , será

$$\alpha \cdot (x - 2y + z - 1) + \beta \cdot (x - z + 3) = 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si ahora queremos hallar el plano del haz que pasa por el punto $A(1,0,3)$, tenemos

$$\alpha \cdot (1 - 2 \cdot 0 + 3 - 1) + \beta \cdot (1 - 3 + 3) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha$$

Que sustituyendo en la ecuación del haz obtenemos

$$\alpha \cdot (x - 2y + z - 1) - 3 \cdot \alpha \cdot (x - z + 3) = 0 \Rightarrow -2\alpha \cdot x - 2 \cdot \alpha \cdot y + 4 \cdot \alpha \cdot z - 10 \cdot \alpha = 0$$

Que simplificando la expresión obtenemos

$$(-\alpha) \cdot (2x + 2y - 4z + 10) = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z + 10 = 0$$

13. Posiciones relativas de la recta y el plano con la esfera

La superficie esférica es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto fijo, denominado centro, La distancia de uno cualquiera de sus puntos de la superficie esférica al centro se denomina radio de la esfera. Es decir, si denominamos $S_{C,r}$ es la esfera de centro $C(a,b,c)$ y radio $r>0$, se deberá de cumplir

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Que quitando los paréntesis e igualando a cero, se obtiene también la ecuación

$$x^2+y^2+z^2-2.a.x-2.b.y-2.c.z+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

Que denominando

$$A=-2.a \quad ; \quad B=-2.b \quad ; \quad C=-2.c.z \quad ; \quad D=a^2+b^2+c^2-r^2$$

Quedará la ecuación

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

Ejemplo.- Para calcular el centro y el radio de la esfera $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z=0$, utilizamos las relaciones $A=-2.a \quad ; \quad B=-2.b \quad ; \quad C=-2.c.z \quad ; \quad D=a^2+b^2+c^2-r^2$

$$\text{Y obtenemos: } a=2 \quad ; \quad b=-2 \quad ; \quad c=1 \quad ; \quad r=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$$

Luego, el centro de la esfera es $(2,-2,1)$ y el radio es $r=3$.

En este apartado utilizaremos dos resultados que estudiaremos en los temas siguientes:

☞ Si π es un plano que contiene al punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{N}(A,B,C)$. Para cualquier punto $P(x,y,z)$ de π (distinto de P_0), se cumplirá

$$\vec{N} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0 \quad \bullet = \text{producto escalar (estudiaremos en tema de espacio euclideo).}$$

Que equivale a la ecuación del plano

$$\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

☞ Si $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ y $P_0(x_0,y_0,z_0)$ es un punto cualquiera, se cumplirá

$$d(P_0, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$d(A,B)$ = distancia de A a B (estudiaremos en tema de espacio métrico).

Sea una esfera de centro $C(a, b, c)$ y radio $r > 0$, un plano tangente a una esfera en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano distinto de P_0 , tendrá por ecuación

$$\overrightarrow{CP_0} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \Rightarrow (x_0 - a) \cdot (x - x_0) + (y_0 - b) \cdot (y - y_0) + (z_0 - c) \cdot (z - z_0) = 0$$

Ejemplo.- Sea la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y + 2z - 2 = 0$, para hallar el plano tangente a $P(3, 3, 2)$. Como el centro de la esfera es $C(2, 2, -1)$, y como $P(3, 3, 2)$ es un punto de la esfera, la ecuación del plano será

$$(3 - 2) \cdot (x - 3) + (3 - 2) \cdot (y - 3) + (2 + 1) \cdot (z - 2) = 0 \Rightarrow x + y + 3z + 12 = 0$$

Par estudiar las posiciones relativas de un plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ y una esfera $S_{C,r}: x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$, Hallamos

$$C(a, b, c) = \left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2} \right)$$

$$r = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 - 4q}$$

Y calculamos

$$d = d(C, \pi) = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Y se cumplirá:

- Si $d > r$, el plano es exterior a la esfera y no se cortará en ningún punto
- Si $d = r$, el plano será tangente a la esfera y, y el punto de tangencia será el punto de intersección del plano con la recta perpendicular a este que pasa por el centro de la esfera
- Si $d < r$ el plano corta a la esfera en una circunferencia cuyo centro es A, es el punto de intersección del plano con la recta perpendicular a este, que pasa por el centro de la esfera, y su radio es $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{r^2 - |\overrightarrow{AC}|^2}$.

Ejemplo.- Para estudiar la posición relativa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ y el plano $x - 2y + 2z - 6 = 0$, como el centro de la esfera es $C(0, 0, 0)$ y el radio es $r = 3$.

Hallando:

$$d = d(C, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = 2$$

Como $d = 2 < 3 = r$, el plano se corta a la esfera en una circunferencia, de ecuaciones

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x - 2y + 2z - 6 &= 0\end{aligned}$$

Además, si queremos calcular, el centro de dicha circunferencia, como la recta tangente al plano que pasa por C, tienes por ecuaciones paramétricas

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 \cdot \lambda \\ z = 2 \cdot \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Es decir, cada punto dicha recta sería de la forma $P(\lambda, -2\lambda, 2\lambda)$, que sustituyendo en la ecuación del plano, se cumplirá:

$$\lambda - 2(-2\lambda) + 2(2\lambda) - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Luego, el centro de dicha circunferencia será:

$$A\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Y su radio será

$$\sqrt{r^2 - |\overrightarrow{AC}|^2} = \sqrt{3^2 - \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)} = \sqrt{5}$$

Finalmente para estudiar la posición relativa de una recta $r: \begin{cases} x = a + t \cdot v_1 \\ y = b + t \cdot v_2 \\ z = c + t \cdot v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y una

esfera $S_{C,r}: x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$.

Si tenemos un punto $P(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2, c + t \cdot v_3)$ de la recta y sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la esfera

$$(a + t \cdot v_1)^2 + (b + t \cdot v_2)^2 + (c + t \cdot v_3)^2 + m \cdot (a + t \cdot v_1) + n \cdot (b + t \cdot v_2) + p \cdot (c + t \cdot v_3) + q = 0$$

Y obtendremos una ecuación de segundo grado en t; que al resolverla obtendremos las soluciones t_1 y t_2 de forma que

Si t_1 y t_2 no son soluciones reales, la recta es exterior a la esfera.

Si t_1 y t_2 son soluciones reales y $t_1 = t_2$, entonces, la recta es tangente a la esfera en el punto $P(a + t \cdot v_1, b + t \cdot v_2, c + t \cdot v_3)$,

Si t_1 y t_2 son soluciones reales y $t_1 \neq t_2$, entonces, la recta es secante a la esfera, y los puntos de corte se obtiene sustituyendo t_1 y t_2 en la ecuación de la recta.