

Teoría – Tema 8

Teoría - 3 - Submatriz, menor y rango

■ Submatriz

Dada una matriz, una submatriz es cualquier matriz contenida en la matriz de partida. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Submatriz de orden } 3 \times 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Algunas submatrices de orden } 3 \times 2 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \dots$$

$$\text{Algunas submatrices de orden } 2 \times 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \dots$$

$$\text{Algunas submatrices de orden } 1 \times 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix} \dots$$

$$\text{Algunas submatrices de orden } 1 \times 1 \rightarrow (-2), (4), (0) \dots$$

■ Menor de una submatriz

Dada una matriz $A_{m \times n}$, un menor de orden p es el determinante de una submatriz cuadrada de orden p contenida en la matriz de partida. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Menor de orden } 3 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ejemplo de menor de orden } 2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ejemplo de menor de orden } 1 \rightarrow |3|$$

Rango de una matriz

Sabemos que el rango de una matriz es el número de vectores linealmente independientes que la forman.

¿Podemos aplicar determinantes para determinar, de manera directa, el rango de una matriz? Sí.

El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

Veamos unos ejemplos.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -12 + 24 + 0 - (-10 + 0 + 0) = 22 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

$$2. \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |B| = -4 + 8 + 0 - (4 + 0 + 0) = 0 \rightarrow \text{rango}(B) \neq 3 \rightarrow \text{Buscamos si existe}$$

$$\text{algún menor de orden } 2 \text{ no nulo} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(B) = 2$$

$$3. \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow |C| = 0 \rightarrow \text{rango}(C) \neq 3 \rightarrow \text{Cualquier menor de orden } 2 \text{ que}$$

podamos obtener también se anula $\rightarrow \text{rango}(C) \neq 2 \rightarrow \text{Buscamos al menos un menor de orden } 1 \text{ no nulo} \rightarrow |-2| = -2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(C) = 1$

4. Hallar el rango de la matriz en función del parámetro k .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |D| = 0 + 2k + 3 - (0 + 0 + 3k) = 2k + 3 - 3k = -k + 3$$

$$\text{Si } -k + 3 \neq 0 \rightarrow k \neq 3 \rightarrow |D| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(D) = 3$$

$$\text{Si } -k + 3 = 0 \rightarrow k = 3 \rightarrow |D| = 0 \rightarrow \text{rango}(D) \neq 3 \rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Buscamos al}$$

$$\text{menos un menor de orden } 2 \text{ no nulo} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(D) = 2$$