TEOREMAS DE FUNCIONES DERIVABLES

Índice:

1. Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y que verifica que $f(a)=f(b)$, entonces, existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

 # Ejemplo.- La función $f(x)=x^4-8x^2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$ ya que es derivable en $(-1,1)$ por ser un polinomio, y cumple:

$$f(-1)=(-1)^4-8.(-1)^2=1-8=-7$$

$$f(1)=(1)^4-8.(1)^2=1-8=-7$$

Luego por el teorema de Rolle, existe un $c\in(-1,1)$ tal que $f'(c)=0$.

Dado que

$$f'(c)=0 \Rightarrow 4c^3-16c=0 \Rightarrow 4c.(c^2-4)=0 \Rightarrow c_1=-2, c_2=0, c_3=2$$

Como, solo $c_1=0$ pertenece al intervalo, tenemos que $c=0$ es el único punto del intervalo $(-1,1)$ donde se satisface el teorema.

 # Ejemplo.- Sea la función $f(x)=x^2-4x+3$, ¿podemos hallar un $b<3$, para que se cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[b,3]$?.

Es evidente que f es una función continua en $[b,3]$ y derivable en $(b,3)$ por ser un polinomio. Como para que se cumple, las condiciones del teorema de Rolle, se tiene que cumplir:

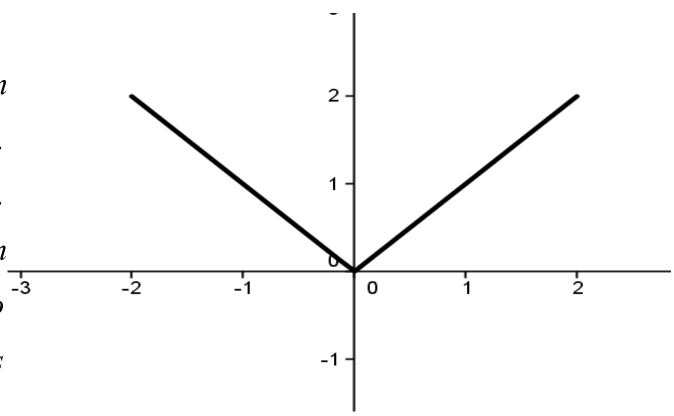
$$f(b)=f(3) \Rightarrow b^2-4b+3=3^2-4.3+3 \Rightarrow b_1=1, b_2=3$$

Pero dado que $b<3$, la única solución es $b=1$, luego para el intervalo $[1,3]$ se cumplen las condiciones del teorema.

Hay que tener en cuenta que el recíproco del teorema de Rolle, no siempre se cumple.

 # Ejemplo.- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=|x|$ en el intervalo $[-2,2]$?.

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo cual es continua en $[-2,2]$. Además, se verifica que $f(-2)=f(2)=2$. Sin embargo, esta función no es derivable en $x=0$, ya que las derivadas laterales no coinciden, por lo cual no cumplen todas las condiciones del teorema de Rolle.



El teorema de Rolle también puede aplicarse para determinar, junto con el teorema de Bolzano, el número de raíces de una función.

 # Ejemplo.- Para comprobar que la función $f(x)=x^3+6x+4$ *únicamente puede tener una raíz real.*

Si aplicamos el teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,0]$ *, como* f *es continua en dicho intervalo, y se cumple:*

$$f(-1)=-3 \qquad y \qquad f(0)=4$$

Podemos afirmar que existe un $c\in(-1,0)$ *tal que* $f(c)=0$.

Además, esta raíz es única, ya que utilizando el teorema de Rolle, si suponemos que $f(x)$ *tiene al menos dos raíces c y d, tal que* $f(c)=f(d)=0$.

Como f(x) es un polinomio, es una función continua en el intervalo $[c,d]$ *(suponiendo sin perdida de generalidad que* $c<d$ *) y derivable en el intervalo* (c,d) *. Además, como toman el mismo valor en los extremos de dicho intervalo, aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos un* $u\in(c,d)$ *tal que* $f'(u)=0$.

Como la derivada de $f(x)$ *es* $f'(x)=3x^2+6$ *, se deberá de cumplir:*

$$f'(u)=3u^2+6=0 \Rightarrow u^2=-2$$

Que es una contradicción, pues dicha ecuación no tiene solución, por lo que tendrá una única raíz.

2. Teorema del valor medio (*de Lagrange o de incrementos*)

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , existe al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a)=f'(c).(b-a)$$

Este teorema es un caso particular del teorema de Rolle, para la función

$$g(x)=f(x).(b-a)-x.(f(b)-f(a))$$

Que dado que se cumple, $g(a)=g(b)$, existe un $c\in(a,b)$ tal que

$$g'(c)=f'(c).(b-a)-(f(b)-f(a))=0 \quad .$$

 # Ejemplo.- ¿Qué valores deben de tomar a y b para que se pueda aplicar el teorema del valor medio a la función

$$f(x)=\begin{cases} a\,x+1 & si\ x<1 \\ x^2+b & si\ x\geq 1\end{cases} \quad ?$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=1$, se tiene que cumplir

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} a\,x+1=a+1=1+b=\lim_{x\to 1^+} x^2+b=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Es decir, se tiene que cumplir

$$a+1=1+b \Rightarrow a=b$$

Y para que sea derivable en x = 1, se tiene que cumplir:

$$f'(1^-)=a=2=f'(1^+) \Rightarrow a=2$$

Luego, de ambas condiciones, se deduce, que si $a=b=2$

Se puede aplicar el teorema del valor medio.

3. Consecuencias del teorema del valor medio

- **Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) , y tal que $f'(c)=0$ para todo punto $c\in[a,b]$; entonces $f(x)$ es constante en $[a,b]$.**
- **Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) , y tal que $f'(x)=g'(x)$ para todo punto $x\in[a,b]$; entonces, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se diferencian en una constante.**

 # Ejemplo.- Como consecuencia del teorema del valor medio, para calcular $\sqrt{51}$, elegimos la función $f(x)=\sqrt{x}$ en el intervalo $[49,51]$ y escogemos el número 49 por ser el cuadrado perfecto más próximo a 51 .

Al ser $f(x)$ continua en $[49,51]$ y derivable en $(49,51)$, podemos aplicar el teorema del valor medio, de forma que existe al menos un $c\in(49,51)$ tal que

$$\sqrt{51}-\sqrt{49}=\frac{1}{2.\sqrt{c}}.(51-49) \Rightarrow \sqrt{51}=7+\frac{1}{\sqrt{c}}, con\, c\in(49,51)$$

Acotamos $\sqrt{51}$ *eliminando c en la expresión anterior:*

$$49<c<51 \Rightarrow \sqrt{49}<\sqrt{c}<\sqrt{51} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{49}}>\frac{1}{\sqrt{c}}>\sqrt{51}$$ *; luego*

$$\sqrt{51}=7+\frac{1}{\sqrt{c}}<7+\frac{1}{\sqrt{49}}=7+\frac{1}{7}=7{,}14$$

4. Teorema del Cauchy

Sea $f(x)$ **y** $g(x)$ **funciones continuas en** $[a,b]$ **y derivables en** (a,b) **y tales que** $g(a)\neq g(b)$ **y** $g'(x_0)\neq 0, \quad \forall x_0\in(a,b)$ **; entonces, existe, al menos, un valor** $c\in(a,b)$ **tal que**

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Este teorema también se conoce con el nombre del teorema del valor medio generalizado,

Para su demostración, basta construir la función

$$F(x)=f(x).[g(b)-g(a)]-g(x).[f(b)-f(a)]$$

Y aplicar el teorema de Rolle en $[a,b]$

 # Ejemplo.- Hallemos en qué punto del intervalo $[0,2]$ *las funciones* $f(x)=x^3$ *y* $g(x)=-x^2+1$ *verifica la tesis del teorema de Cauchy.*

Las funciones $f(x)$ *y* $g(x)$ *son funciones continuas en [0,2] y derivable en* $(0,2)$ *por ser ambas funciones polinómicas, Además,* $g(0)=1$ *y* $g(2)=-3$ *, por lo que* $g(0)\neq g(3)$ *y* $g'(x)=-2x$ *, que no se anula en ningún punto del intervalo* $(0,2)$.

Aplicando el teorema de Cauchy a $f(x)$ *y* $g(x)$ *, obtenemos que:*

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}; \quad con\, c\in(0,2)$$

Luego, resulta que

$$\frac{8-0}{-3-1}=\frac{3c^2}{-2c} \Rightarrow -2=-\frac{3}{2}c \Rightarrow 3c=4 \Rightarrow c=\frac{4}{3}$$

Si en el teorema de Cauchy imponemos la condición $g(x)=x$, obtenemos el teorema del valor medio, lo que constituye un caso concreto del teorema de Cauchy.

5. Regla de L'Hopital

Sean $f(x)$ **y** $g(x)$ **funciones continuas en** $[a,b]$ **y derivables en** (a,b) **, que cumplen que** $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ **, siendo** $x_0\in(a,b)$ **y tales que** $g'(x)\neq 0$ **para cualquier valor** x **del intervalo** (a,b) **. Entonces, si** $f(x_0)=g(x_0)=0$ **y existe** $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ **, resulta que también existe** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ **y, además, estos límites son iguales:**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

 # Ejemplo.- Como $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}\Rightarrow\frac{0}{0}$ *. Por tanto, es una indeterminación, pero, como se cumplen las condiciones para aplicar la regla de L'Hopital, tenemos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

 # Ejemplo.- Como $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x^2-1}{2x^2}\Rightarrow\frac{0}{0}$ *. Por tanto, es una indeterminación, pero, como se cumplen las condiciones para aplicar la regla de L'Hopital, tenemos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x^2-1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x+2x}{4x}\Rightarrow\frac{0}{0}$$

Que también es una indeterminación, pero, como se cumplen también las condiciones para aplicar la regla de L'Hopital, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+x^2-1}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x+2x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+2}{4}=\frac{1}{4}$$

También podemos resolver con la regla de L'Hopital, cuando $x\to\infty$, indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. Y realizando las transformaciones adecuadas, se pueden resolver, además, límites en los que tenemos indeterminaciones del tipo $0.\infty$, 1^{∞} , 0^0 e ∞^0 .

 # Ejemplos.-

- Como $\lim_{x\to 0} x.tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\to 0.\infty$. Lo transformamos y obtenemos un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{cotg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\to\frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{cotg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{-1}{sen^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}}=\lim_{x\to 0}\left(-sen^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=-sen^2\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

- Como $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\to 1^{\infty}$. Lo transformamos y obtenemos un indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$y=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\Rightarrow \ln y=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.\ln(1+x)\to\frac{0}{0}$$

Aplicando la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1$$

Luego:

$$\ln y=1\Rightarrow y=e$$

entonces resulta que:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$