Az $x^5 = y^5 + 20y^2 + 27y + 1$ diofantoszi egyenletet a számelméletben gyakran alkalmazott **„szendvics-elvvel”** (vagy korlátozási módszerrel) oldjuk meg. A cél annak bizonyítása, hogy a jobb oldali polinomalak a legtöbb egész y érték esetén két egymást követő egész szám ötödik hatványa közé esik, így nem lehet egyenlő x^5-nel.

1. lépés: A szomszédos hatványok vizsgálata

Tekintsük az y^5 kifejezést és a nála eggyel nagyobb bázis ötödik hatványát. A binomiális tétel alapján:

$$(y+1)^5 = y^5 + 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1$$

Ha összehasonlítjuk ezt az eredeti egyenlet jobb oldalával ($P(y) = y^5 + 20y^2 + 27y + 1$), látható, hogy nagy y értékek esetén az $(y+1)^5$ kifejezésben szereplő $5y^4$ és $10y^3$ tagok növekedési üteme messze felülmúlja a $P(y)$-ban lévő $20y^2$ tagot.

2. lépés: Az aszimptotikus egyenlőtlenség felírása

Alaposabb algebrai vizsgálattal (a különbségek előjelének ellenőrzésével) belátható, hogy szinte minden egész y esetén fennáll a következő szigorú egyenlőtlenség:

$$y^5 < y^5 + 20y^2 + 27y + 1 < (y+1)^5$$

Ez a „szendvics” pontosan akkor teljesül, ha:

- $y \geq 2$ (pozitív tartomány)
- $y \leq -2$ (negatív tartomány)

Mivel két egymást követő egész szám ötödik hatványa között **nem létezhet egy harmadik egész szám ötödik hatványa (x^5)**, ezért ezekben a végtelen tartományokban az egyenletnek **nincs megoldása**.

3. lépés: A kritikus pontok (maradék esetek) ellenőrzése

A globális aszimptotikus viselkedés vizsgálata után a lehetséges megoldások köre mindössze három kritikus egész értékre szűkül le. Ezeket behelyettesítéssel ellenőrizzük:

1. **Ha $y = -1$:** $x^5 = -7 \Longrightarrow$ nem ad egész megoldást.
2. **Ha $y = 1$:** $x^5 = 49 \Longrightarrow$ nem ad egész megoldást.
3. **Ha $y = 0$:** $x^5 = 1 \Longrightarrow \mathbf{x = 1}$ (egész szám).

Következtetés

Az egyenlet egyetlen rendezett egész számpár megoldása az $\boldsymbol{(x, y) = (1, 0)}$.

Didaktikai / GeoGebra relevanciája

A feladat kiválóan szemléltethető grafikusan: ha ábrázoljuk az $f(y) = \sqrt[5]{y^5 + 20y^2 + 27y + 1}$ függvényt, a diákok vizuálisan is láthatják, hogyan simul rá a görbe az $y \geq 2$ és $y \leq -2$ tartományokban az $g(y) = y$ és $h(y) = y + 1$ egyenesek közé, rávilágítva arra, hogy a görbe miért csak egyetlen rácsponton ($y = 0$-nál) halad át.