

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } -3 < x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{e^{(x-1)} - 1}{x^2 - 1} & \text{si } 1 < x \leq 5 \end{cases}$ en $x=0$, $x=1$ y $x=5$. Si no es continua en uno de esos puntos frontera, indicar el tipo de discontinuidad.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Sea $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$. Estudia la posición relativa de la función respecto sus asíntotas horizontales. (ayuda: en las A.H. debes estudiar comportamiento de x en $+\infty$ y en $-\infty$).

Ejercicio 3.- a) [1 punto] Obtener m para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+mx)}{\sin(2x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

b) [1,5 puntos] Estudiar posición relativa de $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ respecto a su asíntota horizontal.

Ejercicio 4.- a) [1,5 puntos] Demuestra que la función $f(x) = x^3 - \ln(x) - 5$ corta al menos una vez al eje horizontal en el intervalo $(1, 2)$

b) [1 punto] Determinar, de manera razonada, el dominio de $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{1-\sqrt{x}}$

Opción B

Ejercicio 1.- a) [1,5 puntos] Ana afirma que la ecuación $\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 = x + 1$ tiene al menos una solución negativa. Pedro, en cambio, afirma que tiene al menos una solución positiva. ¿Quién tiene razón? Justifica matemáticamente tu respuesta.

b) [1 punto] Sean dos números reales positivos que suman 10. ¿Cuáles son esos números si generan el producto de valor máximo? Resolver el ejercicio mediante un problema de optimización.

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = x(x-1)$ y $g(x) = |x|$.

a) [1,5 puntos] Obtener $(g \circ f)(x)$ y representarlo gráficamente. Obtener puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) [1 punto] Resolver la ecuación $(f \circ g)(x) = 0$

Ejercicio 3.- a) [1,5 puntos] Demostrar que $f(x) = \frac{-x^5 - 4x + 1}{x^2 + 1}$ corta al eje horizontal en algún punto del intervalo $(0, 2)$.

b) [1 punto] Resuelve $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x)$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcula $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$