Problemas – Tema 2

CCSS Problemas resueltos - 9 - método por partes

1. Resuelve $I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

Integramos por partes.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \rightarrow \quad v=2\sqrt{x}$$

$$I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-4\sqrt{x}+C$$

$$I=2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+C$$

2. Determina la función $f:(0,\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Nos dan la segunda derivada de la función: $f''(x)=\ln(x)$.

Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar dos veces. En cada integración obtendremos una constante de integración. El valor de cada constante lo obtendremos aplicando las dos condiciones que nos da el enunciado.

$$f''(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\int \ln(x)\,dx$$

Aplicamos partes:

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$f'(x)=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

La constante de integración C la obtenemos del dato de que la función posee tangente horizontal en $P(1,2)$. Es decir, en $x=1$ la derivada de la función es nula (por ser 0 la pendiente de la recta tangente).

$$f'(1)=0 \quad \rightarrow \quad 1\cdot\ln(1)-1+C=0 \quad \rightarrow \quad C=1 \quad \rightarrow \quad f'(x)=x\cdot\ln(x)-x+1$$

Nuevamente integramos, para obtener la función buscada $f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \qquad f(x)=\int (x\cdot\ln(x)-x+1)\,dx \quad \rightarrow \quad f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\int x\,dx+\int 1\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\frac{x^2}{2}+x$$

Nuevamente debemos aplicar partes para la integral que nos aparece.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=x\,dx \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x}{2}dx-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+x+D$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+x+D$$

La constante de integración D la obtenemos del dato de que la función pasa por el punto $P(1,2)$.

$$f(1)=2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}\cdot\ln(1)-\frac{3\cdot 1}{4}+1+D=2 \quad\rightarrow\quad D=\frac{7}{4}$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x)-\frac{3}{2})+x+\frac{7}{4}$$

3. Resuelve $\int x \cdot e^x \, dx$

$u = x$ → diferenciamos → $du = dx$

$dv = e^x dx$ → integramos → $v = e^x$

$I = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C = (x-1) e^x + C$

4. Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=\ln(x^2+1)$. Determina la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

La condición de contorno es $f(0)=0$, con la que podremos resolver la constante de integración.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \quad \to \quad f(x)=\int \ln(x^2+1)\,dx$$

Aplicamos partes.

$$u=\ln(x^2+1) \quad \to \quad u'=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$v'=1 \quad \to \quad v=x$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx$$

$$f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2\int dx+2\int \frac{1}{x^2+1}dx=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)+C$$

$$f(0)=0 \quad \to \quad 0-0+0+C=0 \quad \to \quad C=0 \quad \to \quad f(x)=x\cdot\ln(x^2+1)-2x+2\,arctg(x)$$

En la solución final no hemos aplicado valor absoluto al logaritmo porque su argumento siempre es positivo.

5. Resuelve $\int x^2 \cdot \ln(x)\,dx$

Aplicamos partes:

$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=x^2 \quad \rightarrow \quad v(x)=\frac{x^3}{3}$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$I=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$I=\frac{x^3}{3}\cdot\ln|x|-\frac{1}{9}x^3+C$$

6. Resuelve $\int x \cdot e^{-x}\, dx$

Aplicamos partes.

$$I=\int x\cdot e^{-x}\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$u=x \quad \rightarrow \quad u'=1$$

$$v'=e^{-x} \quad \rightarrow \quad v=-e^{-x}$$

$$I=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}\,dx=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C$$

7. Calcula $\int x^2 \cdot \cos(x)\, dx$

Aplicamos partes.

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad du = 2x$$
$$dv = \cos(x) \quad \rightarrow \quad v = sen(x)$$

Y la integral queda:

$$I = x^2 \cdot sen(x) - 2\int x \cdot sen(x)\, dx$$

Aplicamos nuevamente partes en la nueva integral.

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = 1$$
$$dv = sen(x) \quad \rightarrow \quad v = -\cos(x)$$

$$I = x^2 \cdot sen(x) - 2[-x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx]$$
$$I = x^2 \cdot sen(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\, dx = x^2 \cdot sen(x) + 2x\cos(x) - 2\, sen(x) + C$$

8. Resuelve $\int \ln x \, dx$

Integramos por partes:

$$u=\ln x \rightarrow\rightarrow\rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx \rightarrow\rightarrow\rightarrow v=x$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Por lo tanto:

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln |x| - x + C$$

Donde, una vez más, aplicamos valor absoluto al argumento del valor absoluto.