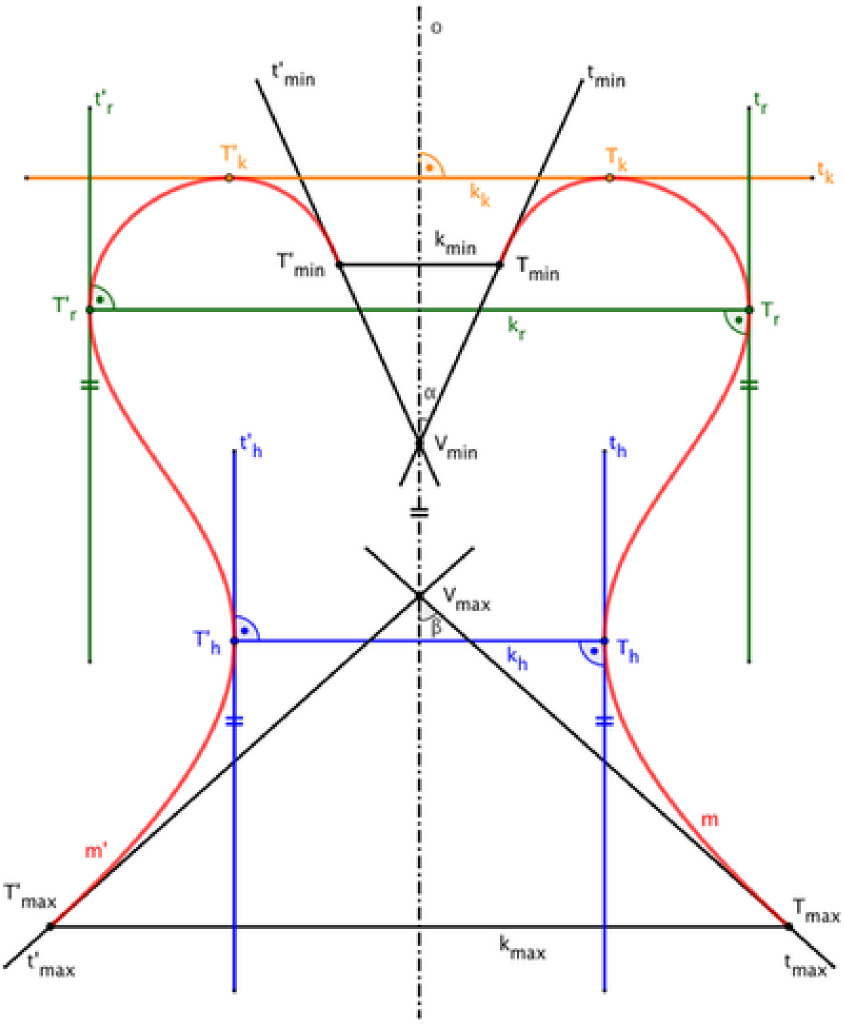
# Kapitola 1

# Rotační plochy

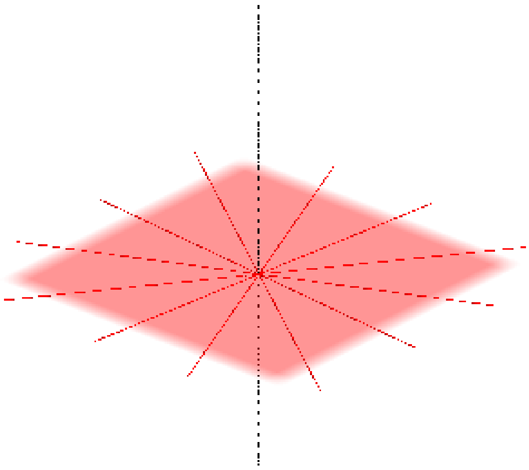
- vznikají otáčením (rotací) křivky kolem osy
- můžeme rotovat křivky rovinné (kružnice, elipsa, parabola, sinusoida ...), ale i prostorové (šroubovice, Vivianiho křivka ...), každý bod křivky vytvoří kružnici ležící v rovině kolmé k ose rotace, střed kružnice je průsečík této roviny a osy rotace, rotační plocha je pak souhrnem všech těchto kružnic
- při rotaci rovinné křivky obvykle předpokládáme, že osa rotace leží v rovině křivky, jinak by se chovala jako křivka prostorová
- řezem plochy rovinou procházející osou (**osový řez**) získáme rovinnou křivku zvanou **poledník** neboli **meridián**, libovolné dva poledníky jsou shodné
- řezem plochy rovinou kolmou k ose (**normálový řez**) získáme kružnici se středem na ose (**rovnoběžka**), rovnoběžky mají obvykle různý poloměr
- každým bodem na povrchu rotační plochy prochází právě jeden poledník a jedna rovnoběžka, tečná rovina v tomto bodě je určena jednoznačně tečnou tohoto poledníku a tečnou této rovnoběžky
- tečny dotýkající se poledníků podél bodů jedné obecné rovnoběžky vytvoří tečnou rotační kuželovou plochu s vrcholem ležícím na ose rotace
- tečny dotýkající se poledníků podél bodů jedné speciální rovnoběžky vytvoří buď tečnou rotační válcovou plochu (rovníková a hrdelní rovnoběžka) nebo rovinu kolmou k ose rotace (kráterová rovnoběžka)




- osově souměrné křivky $m, m'$ nazýváme polomeridiány, dohromady tvoří meridián
- rovnoběžka $k_r$, která má v dané oblasti největší poloměr a v jejíž bodech $T_r, T_r'$ jsou tečny $t_r, t_r'$ poledníků $m, m'$ rovnoběžné s osou $o$, se nazývá **rovník, rovníková rovnoběžka**
- rovnoběžka $k_h$, která má v dané oblasti nejmenší poloměr a v jejíž bodech $T_h, T_h'$ jsou tečny $t_h, t_h'$ poledníků $m, m'$ rovnoběžné s osou $o$, se nazývá **hrdlo, hrdelní rovnoběžka**
- rovnoběžka $k_k$, v jejíž bodech $T_k, T_k'$ jsou tečny $t_k, t_k'$ poledníků $m, m'$ kolmé k ose $o$, se nazývá **kráter, kráterová rovnoběžka**
- v bodech všech ostatních rovnoběžek tečny k poledníkům $m, m'$ svírají s osou $o$ obecný úhel a vytváří tečnou kuželovou plochu s vrcholem na ose $o$
- rovnoběžka $k_{max}$, která má největší poloměr a v jejíž bodech $T_{max}, T_{max}'$ jsou tečny $t_{max}, t_{max}'$ poledníků $m, m'$ různoběžné s osou $o$, se nazývá **maximální rovnoběžka**
- rovnoběžka $k_{min}$, která má největší poloměr a v jejíž bodech $T_{min}, T_{min}'$ jsou tečny $t_{min}, t_{min}'$ poledníků $m, m'$ různoběžné s osou $o$, se nazývá **minimální rovnoběžka**

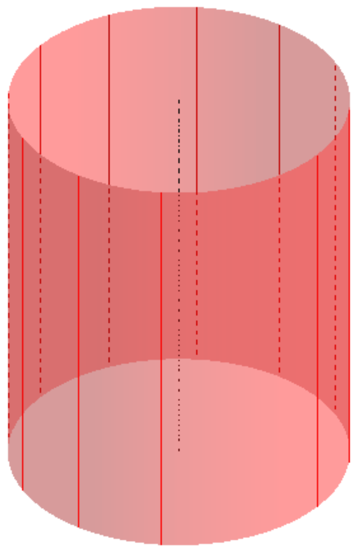
## 1.1 Rotační přímkové plochy

### 1.1.1 Rovina kolmá k ose



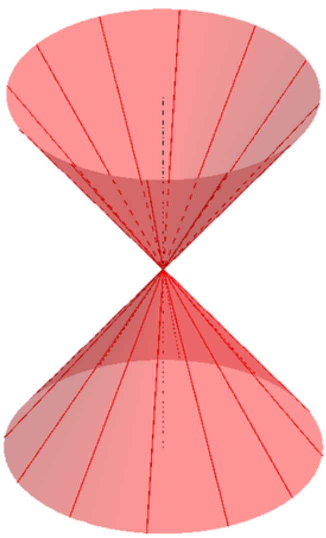
rotace přímky kolmé k ose rotace

### 1.1.2 Rot. válcová plocha



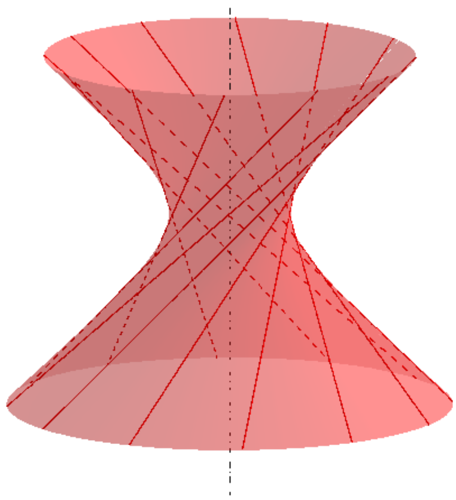
rotace přímky rovnoběžné s osou rotace

### 1.1.3 Rot. kuželová plocha



rotace přímky různoběžné s osou rotace

### 1.1.4 Rot. jednodílný hyperboloid



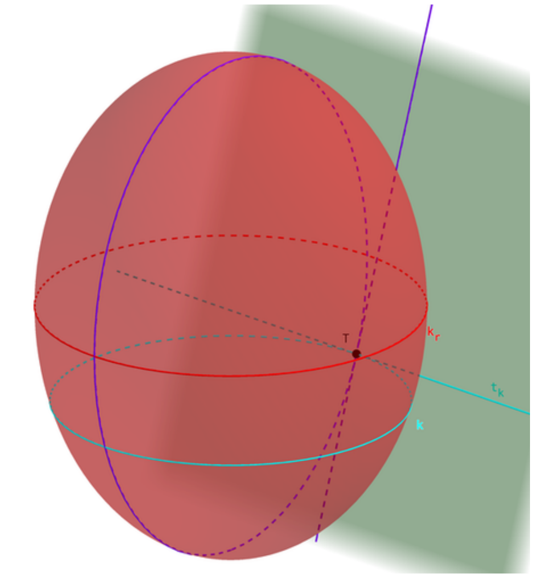
rotace přímky mimoběžné s osou rotace

## 1.2 Rotační (regulární) kvadriky

vznikají rotací kuželoseček kolem jejich os souměrnosti

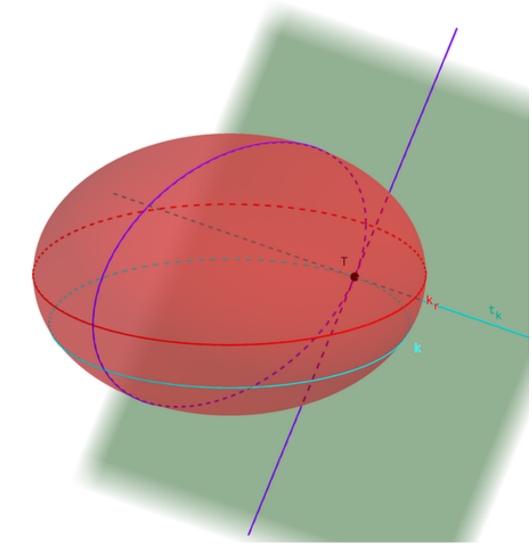
### 1.2.1 Elipsoidy

**Protáhlý (vejčitý)**



rotace elipsy kolem hlavní osy souměrnosti

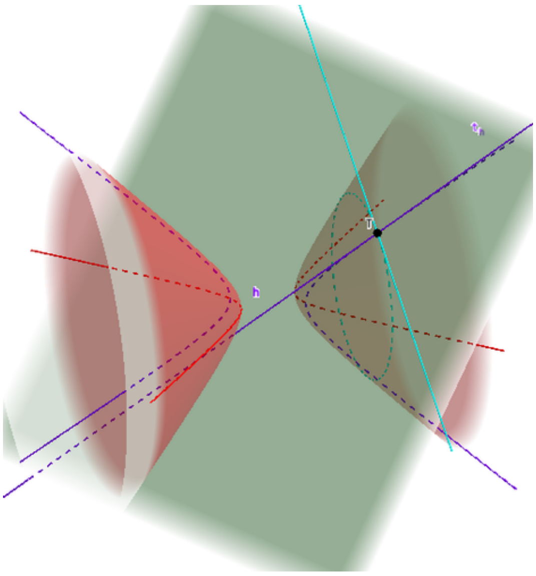
**Zploštělý (diskový)**



rotace elipsy kolem vedlejší osy souměrnosti

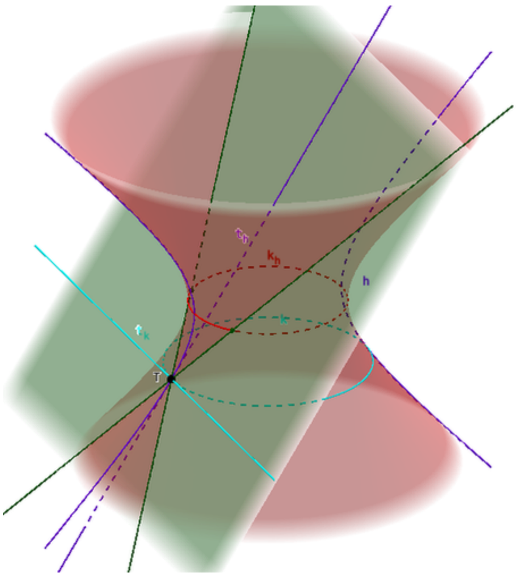
### 1.2.2 Hyperboloidy

**Dvoudílný (miskový)**



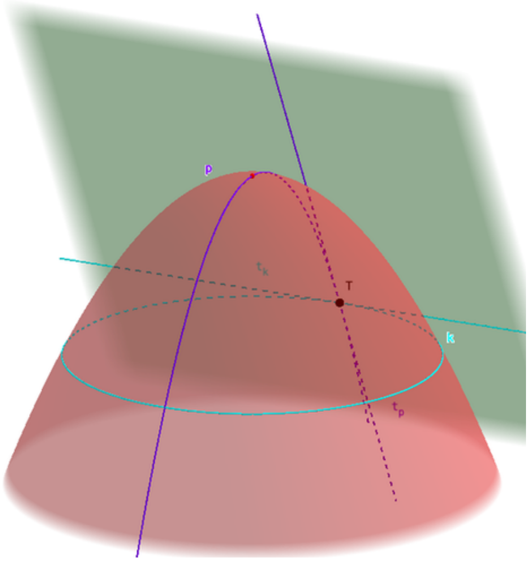
rotace hyperboly kolem hlavní osy souměrnosti

**Jednodílný**



rotace hyperboly kolem vedlejší osy souměrnosti

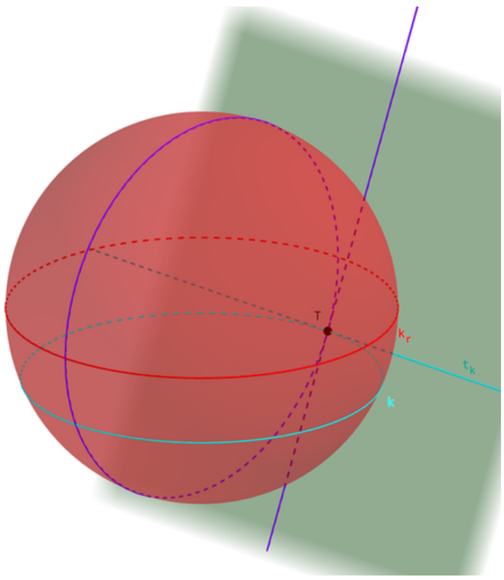
### 1.2.3 Paraboloid




rotace paraboly kolem osy souměrnosti

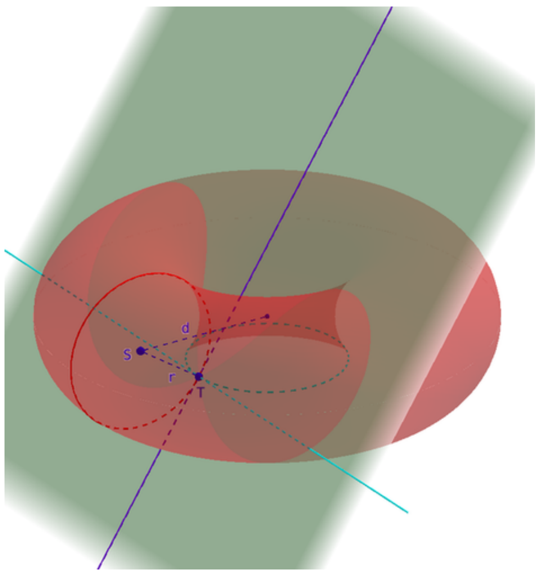
## 1.3 Plochy vzniklé rotací kružnice

### 1.3.1 Kulová plocha




rotace kružnice kolem libovolné přímky procházející jejím středem

### 1.3.2 Anuloid (prstenec)




rotace kružnice kolem libovolné přímky **ne**procházející jejím středem
kružnice a osa rotace leží v jedné rovině

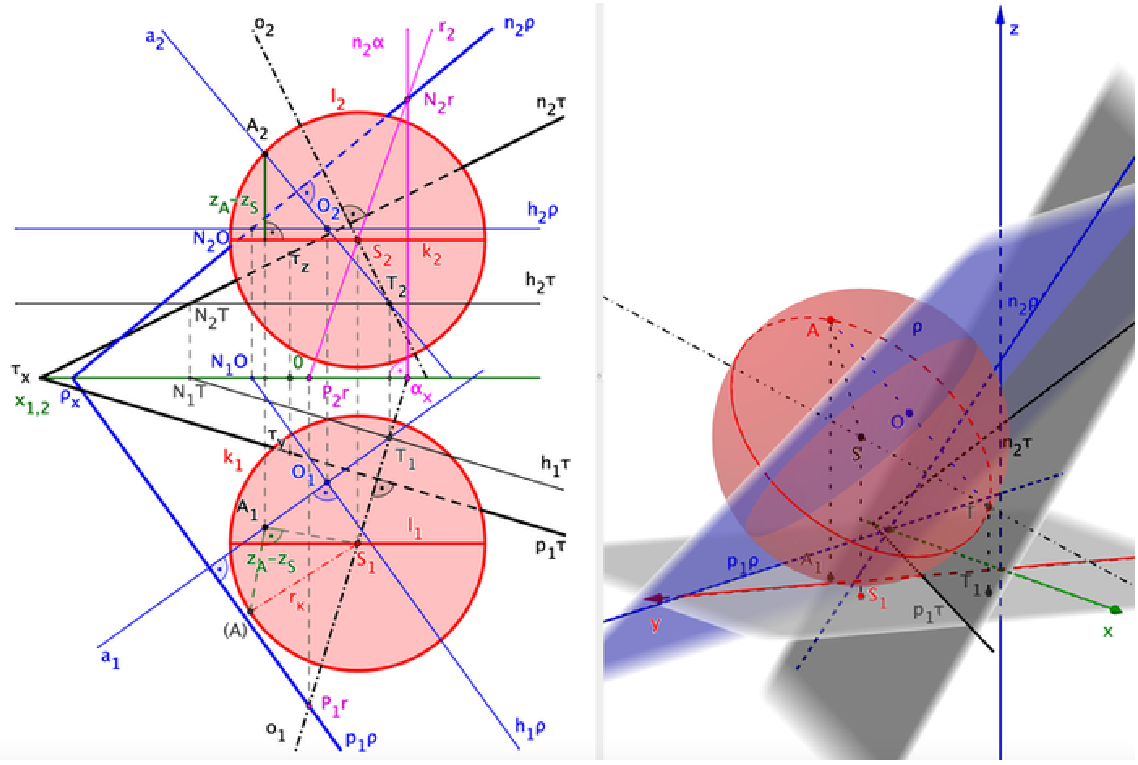
## Kulová plocha

**Definice:** *Kulová plocha je množina bodů v prostoru, které mají od daného bodu (střed $S$) stejnou vzdálenost (poloměr $r$).*

- KP vzniká rotací kružnice kolem osy, která prochází jejím středem kružnice i osa rotace leží ve stejné rovině
- každá přímka procházející středem KP je její osou rotace
- každým bodem na povrchu KP prochází nekonečně mnoho kružnic, jejichž středem je střed KP $\Longrightarrow$ tečny všech těchto kružnic v daném bodě vytvoří tečnou rovinu, která bude kolmá na spojnici středu KP a společného bodu dotyku tečen neboli na poloměr KP
- libovolná dvojice různých bodů na povrchu KP určí **tětivu**, sestrojíme-li středem tětivy rovinu k ní kolmou (analogie osy úsečky) získáme rovinu **souměrnosti**, která **vždy** prochází středem KP a rozděluje ji na dvě shodné části
- řezem KP libovolnou rovinou získáme kružnici (průmětem je ale obvykle elipsa)

## 1.4 Řešené příklady

### 1.4.1 Kulová plocha daná tečnou rovinou s bodem dotyku T a obecném bodem A plochy



Bodem dotyku $T$ vedeme osu $o$ plochy kolmo k tečné rovině $\tau$. Středem $O$ tětivy $AT$ sestrojíme rovinu $\rho$ na ni kolmou. Průsečík osy $o$ a roviny souměrnosti $\rho$ je střed $S$ kulové plochy, poloměr $r_\kappa = |AS| = |TS|$ najdeme ve sklopení.

0. doplníme $T_1$ pomocí hlavní přímky I. osnovy roviny $\tau$:
   $T_2 \in {}^I h_2^\tau \parallel x_{1,2}$
   ${}^I h_2^\tau \cap n_2^\tau = N_2^T \xrightarrow{ord} N_1^T \in x_{1,2}$
   $N_1^T \in {}^I h_1^\tau \parallel p_1^\tau$
   $T_2 \xrightarrow{ord} T_1 \in {}^I h_1^\tau$

1. bodem dotyku $T$ vedeme osu $o$ plochy kolmo k tečné rovině $\tau$:
   $T_1 \in o_1 \perp p_1^\tau$; $T_2 \in o_2 \perp n_2^\tau$

2. středem $O$ tětivy $AT$ sestrojíme rovinu $\rho$ na ni kolmou:

a) $O_1$ je střed úsečky $A_1T_1, O_2$ je střed úsečky $A_2T_2$

b) bodem $O$ proložíme hlavní přímku I. osnovy roviny souměrnosti $\rho$:
   $O_1 \in {}^I h_1^\rho \perp A_1T_1$; ${}^I h_1^\rho \cap x_{1,2} = N_1^O$
   $O_2 \in {}^I h_2^\rho \parallel x_{1,2}$; $N_1^O \xrightarrow{ord} N_2^O \in {}^I h_2^\rho$
   $N_2^O \in n_2^\rho \perp A_2T_2$; $n_2^\rho \cap x_{1,2} = \rho_x$
   $\rho_x \in p_1^\rho \perp A_1T_1$

3. najdeme střed $S$ jako průsečík osy $o$ a roviny souměrnosti $\rho$:

a) osou $o$ proložíme pomocnou rovinu $\alpha$ kolmou k půdorysně $\pi$:
$p_1^\alpha = o_1$; $(p_1^\alpha =)o_1 \cap x_{1,2} = \alpha_x$; $\alpha_x \in n_2^\alpha \perp x_{1,2}$

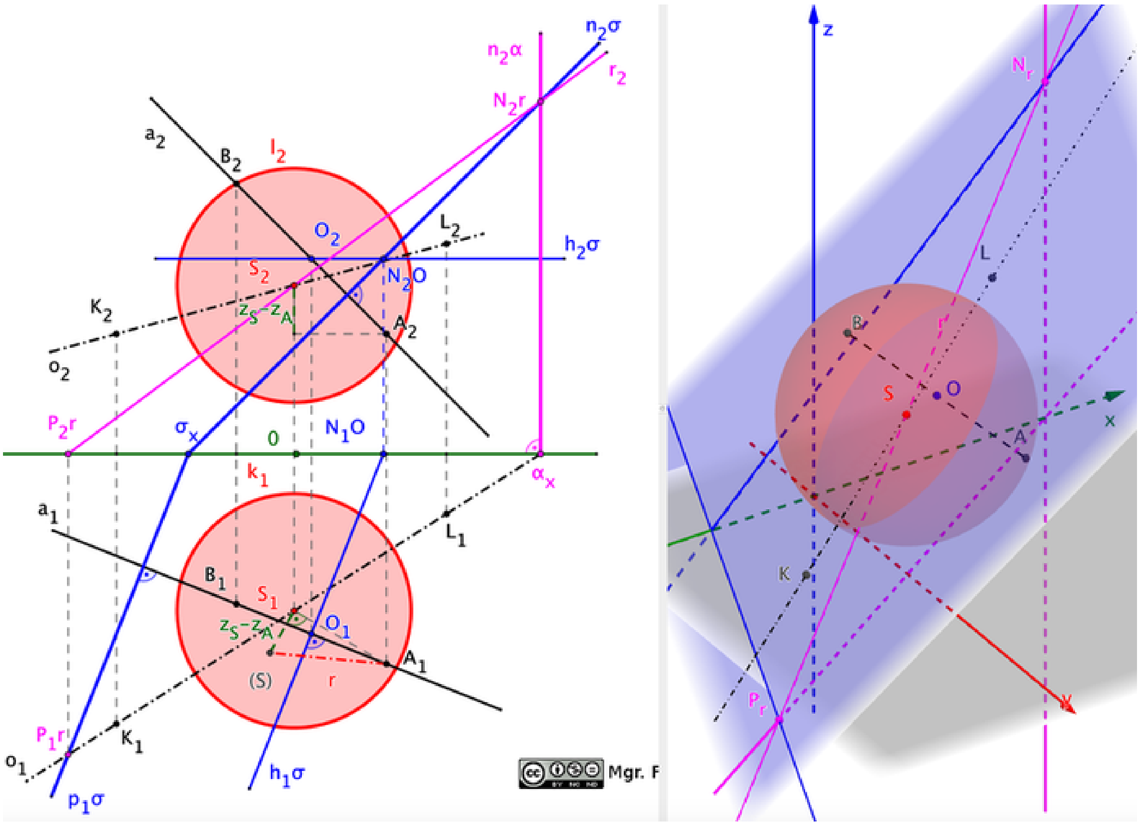
b) najdeme průsečnici $r$ rovin $\rho$ a $\alpha$:
$p_1^\rho \cap o_1 = P_1^r \xrightarrow{ord} P_2^r \in x_{1,2}$
$n_2^\rho \cap n_2^\alpha = N_2^r \xrightarrow{ord} N_1^r = \alpha_x$
$r : r_1 = P_1^r N_1^r = o_1,\ r_2 = P_2^r N_2^r$

c) najdeme střed $S$:
$o_2 \cap r_2 = S_2 \xrightarrow{ord} S_1 \in o_1$

3. sklopením úsečky $AS$ najdeme poloměr $r_\kappa$ kulové plochy:
použijeme tzv. redukované sklopení do roviny rovnoběžné s půdorysnou procházející středem $S$
$z_S - z_S = 0 \Longrightarrow S_1 = (S)$
$z_A - z_S = |A_1(A)|;\ A_1(A) \perp A_1 S_1$
$r_\kappa = |(A)S_1|$

4. vykreslení kulové plochy $\kappa(S; r_\kappa)$
kruh $\pi$-průmětu $k_1(S_1; r_\kappa)$ se promítá v nárysně jako průměr $k_2 \parallel x_{1,2}$
kruh $\nu$-průmětu $l_2(S_2; r_\kappa)$ se promítá v půdorysně jako průměr $l_1 \parallel x_{1,2}$

## 1.4.2 Kulová plocha daná tětivou AB a osou plochy




Sestrojíme rovinu souměrnosti tětivy $AB$, která protne osu $o = KL$ ve středu $S$ kulové plochy. Poloměr najdeme se sklopení úsečky $AS$ nebo $BS$.

1. středem $O$ tětivy $AB$ sestrojíme rovinu $\sigma$ na ni kolmou:

a) $O_1$ je střed úsečky $A_1B_1, O_2$ je střed úsečky $A_2B_2$

b) bodem $O$ proložíme hlavní přímku I. osnovy roviny souměrnosti $\sigma$:
$O_1 \in {}^I h_1^\sigma \perp A_1B_1;\ {}^I h_1^\sigma \cap x_{1,2} = N_1^O$
$O_2 \in {}^I h_2^\sigma \parallel x_{1,2};\ N_1^O \xrightarrow{ord} N_2^O \in {}^I h_2^\sigma$
$N_2^O \in n_2^\sigma \perp A_2B_2;\ n_2^\sigma \cap x_{1,2} = \sigma_x$
$\sigma_x \in p_1^\sigma \perp A_1B_1$

2. najdeme střed $S$ jako průsečík osy $o$ a roviny souměrnosti $\sigma$:

a) osou $o$ proložíme pomocnou rovinu $\alpha$ kolmou k půdorysně $\pi$:
$p_1^\alpha = o_1;\ (p_1^\alpha =)o_1 \cap x_{1,2} = \alpha_x;\ \alpha_x \in n_2^\alpha \perp x_{1,2}$

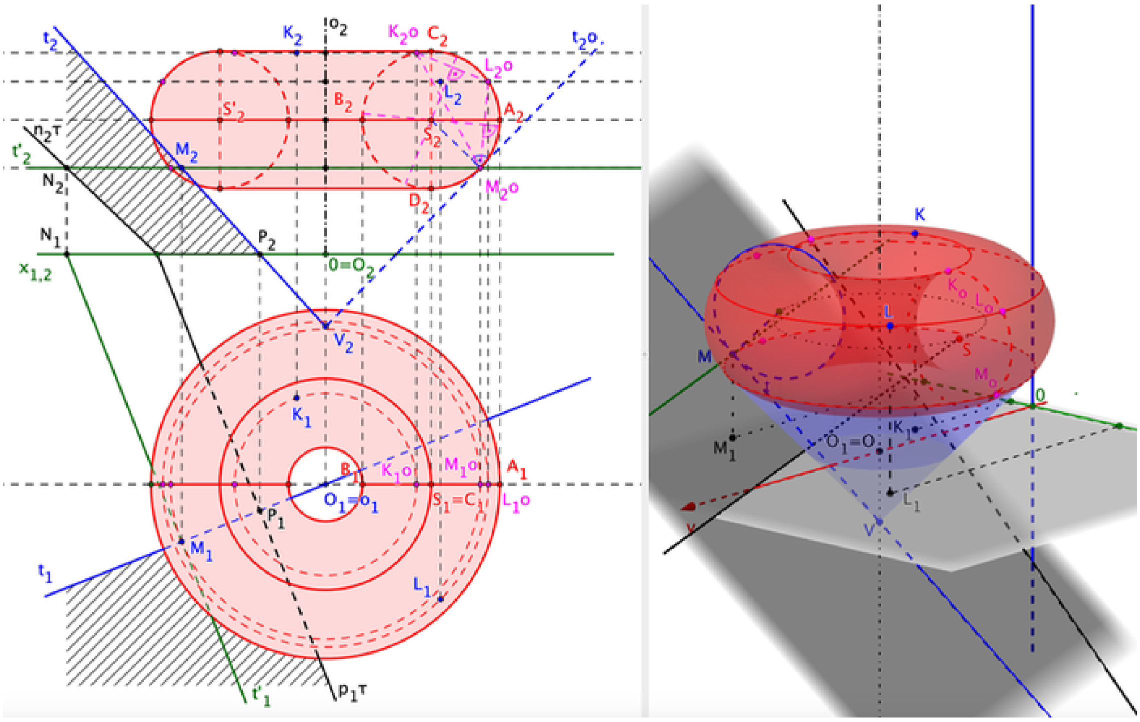
b) najdeme průsečnici $r$ rovin $\sigma$ a $\alpha$:
$p_1^\sigma \cap o_1 = P_1^r \xrightarrow{ord} P_2^r \in x_{1,2}$
$n_2^\sigma \cap n_2^\alpha = N_2^r \xrightarrow{ord} N_1^r = \alpha_x$
$r : r_1 = P_1^r N_1^r = o_1,\ r_2 = P_2^r N_2^r$

c) najdeme střed $S$:
$o_2 \cap r_2 = S_2 \xrightarrow{ord} S_1 \in o_1$

3. sklopením úsečky $AS$ najdeme poloměr $r$ kulové plochy:
použijeme tzv. redukované sklopení do roviny rovnoběžné s půdorysnou procházející bodem $A$
$z_A - z_A = 0 \Longrightarrow A_1 = (A)$
$z_S - z_A = |S_1(S)|;\ S_1(S) \perp A_1S_1$
$r = |(S)A_1|$

4. vykreslení kulové plochy $\kappa(S; r_\kappa)$
kruh $\pi$-průmětu $k_1(S_1; r)$
kruh $\nu$-průmětu $l_2(S_2; r)$

### 1.4.3 Anuloid (prstenec)




Ani jeden ze zadaných bodů neleží v rovině skutečného obrysu pro nárysnu (rovina rovnoběžná s nárysnou procházející osou $o$), takže je kolem osy $o$ do této roviny otočíme. Otočené body určí tvořící kružnici pomocí níž odvodíme průměty plochy. V otočeném bodě $M_o$ sestrojíme pomocnou tečnu obrysového poledníku (kružnice), která nám určí vrchol $V$ tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna poledníku bodu $M$, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecné body $K, L, M$ do roviny obrysové elipsy
   $K_1 \in k_K(O_1)$; $K_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $K_2 K_2^o \parallel x_{1,2}$; $K_1^o \xrightarrow{ord} K_2^o$
   $L_1 \in k_L(O_1)$; $L_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $L_2 L_2^o \parallel x_{1,2}$; $L_1^o \xrightarrow{ord} L_2^o$
   $M_1 \in k_M(O_1)$; $M_1^o O_1 \parallel x_{1,2}$; $M_2 M_2^o \parallel x_{1,2}$; $M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$

2. sestrojíme kružnici opsanou trojúhelníku $\triangle K_2^o L_2^o M_2^o$ se středem $S_2$
   $S_2 \in A_2 B_2 \perp o_2$ - rotací bodu $A$ vzniká rovníková kružnice, bodu $B$ hrdelní kružnice, pro půdorysnu jsou to vnější a vnitřní obrysová kružnice
   $S_2 \in C_2 D_2 \parallel o_2$ - rotací bodů $C, D$ vznikají horní a dolní kráterové kružnice

3. sestrojíme tečnu obrysové kružnice (poledníku) v bodě $M_2^o$:
   tečna $M_2^o \in t_2^o \perp M_2^o S_2$
   najdeme vrchol $V$ kužele tečen:
   $t_2^o \cap o_2 = V_2 \xrightarrow{ord} V_1 = O_1$
   tečna poledníku v bodě $M$:
   $t_1 = M_1 O_1$; $t_2 = M_2 V_2$ (čárkovaně)

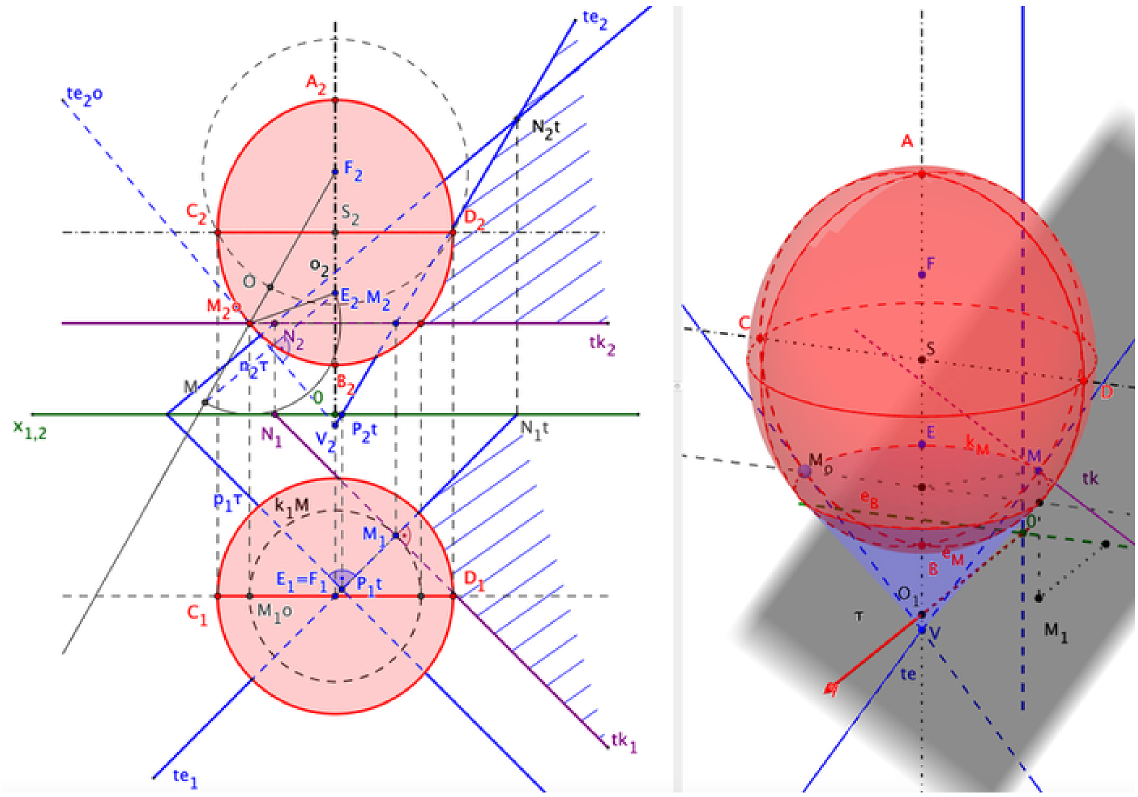
4. tečna rovnoběžky v bodě $M$:
   $M_1 \in t_1' \perp M_1 O_1$; $M_2 \in t_2' \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)

5. viditelnost:
   $M_1$ - neviditelný ($M_2$ pod $S_2 S_2'$) $\Longrightarrow t_1, t_1'$ viditelné mimo $\pi-$průmět (uvnitř hrdelní kružnice $t_1$ vidíme)

$M_2$ - viditelný ($M_1$ není mezi $A_1S_1$ a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow t_2, t_2'$ viditelné přes $\nu-$průmět
v půdorysně šrafujeme po obrysovou křivku (rovník), ne až k bodu $M_1$
v nárysně šrafujeme přes obrysovou křivku až k bodu $M_2$

6. stopy tečné roviny není třeba hledat
$t_2 \cap x_{1,2} = P_2 \xrightarrow{ord} P_1 \in t_1$
$t_1' \cap x_{1,2} = N_1 \xrightarrow{ord} N_2 \in t_2'$
$P_1 \in p_1^\tau \perp t_1;\ p_1^\tau \cap x_{1,2} = \tau_x;\ n_2^\tau = \tau_x N_2$

### 1.4.4 Rotační protáhlý elipsoid




Bod $M$ není bodem obrysové kružnice pro půdorysnu ani obrysové elipsy pro nárysnu, musíme ho otočil kolem osy $o = EF$ do roviny obrysové elipsy pro nárysnu, která je rovnoběžná s nárysnou s prochází osou $o$. Najdeme hlavní a vedlejší vrcholy obrysové elipsy a odvodíme půdorysný průmět. V otočeném bodě $M_o$ sestrojíme pomocnou tečnu obrysové elipsy, která nám určí vrchol $V$ tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna elipsy bodu $M$, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecný bod $M$ do roviny obrysové elipsy
$M_1 \in k_M(E_1 = F_1);\ M_1^o E_1 \parallel x_{1,2}$
$M_2 M_2^o \parallel x_{1,2};\ M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$

2. podle definice elipsy platí:
$|E_2 M_2^o| + |M_2^o F_2| = 2a = |MF_2| \longrightarrow a = \frac{|MF_2|}{2} = |MO| = |A_2 S_2| = |C_2 F_2|$
$C_2 \xrightarrow{ord} C_1 \in M_1^o E_1$ elipsu zatím nevykreslujeme !

3. sestrojíme tečnu obrysové elipsy v bodě $M_2^o$:
tečna $te_2^o$ půlí úhel $\angle M M_2^o E_2$ neboli $M_2^o \in te_2^o \perp ME_2$

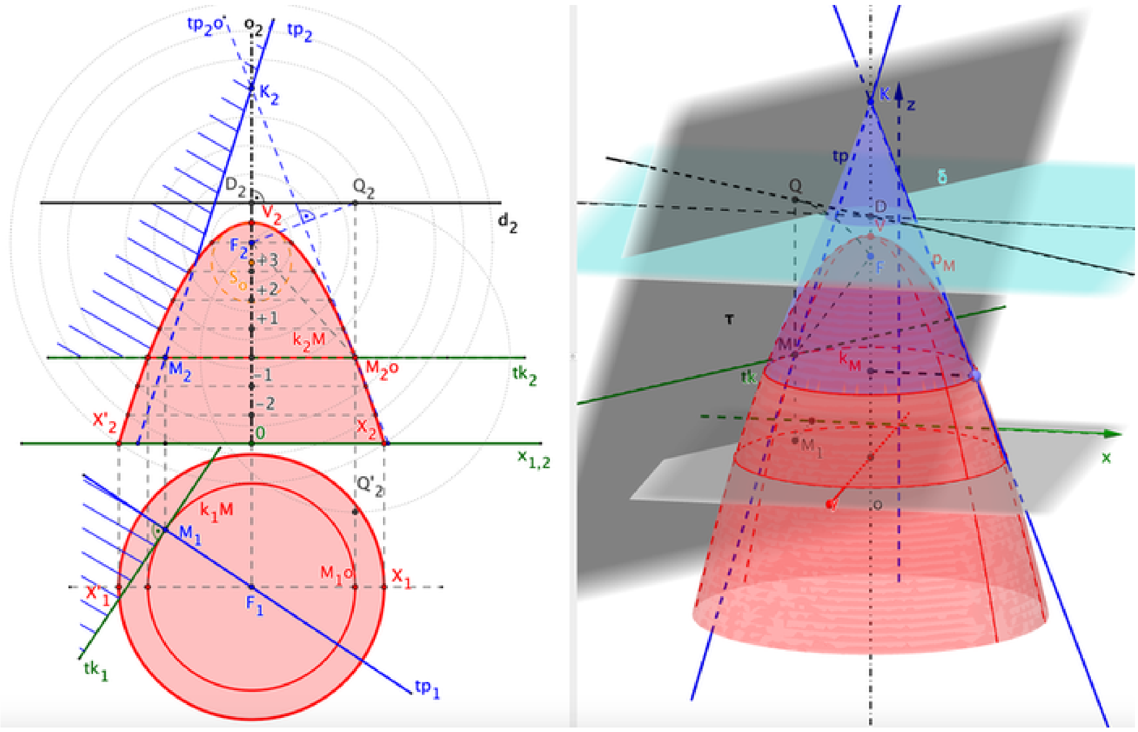
najdeme vrchol $V$ kužele tečen:
$te_2^o \cap E_2F_2 = V_2 \xrightarrow{ord} V_1 = E_1$
tečna poledníku v bodě $M$:
$te_1 = M_1E_1;\ te_2 = M_2V_2$ (čárkovaně)

4. tečna rovnoběžky v bodě $M$:
$M_1 \in tk_1 \perp M_1E_1;\ M_2 \in tk_2 \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)

5. viditelnost:
$M_1$ - neviditelný ($M_2$ pod $C_2D_2$) $\Longrightarrow te_1, tk_1$ viditelné mimo $\pi-$průmět
$M_2$ - neviditelný ($M_1$ mezi $C_1D_1$ a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow te_2, tk_2$ viditelné mimo $\nu-$průmět
šrafujeme po obrysové křivky, ne až k bodu dotyku

6. stopy tečné roviny není třeba hledat
$te_2 \cap x_{1,2} = P_2^t \xrightarrow{ord} P_1^t \in te_1$
$te_1 \cap x_{1,2} = N_1^t \xrightarrow{ord} N_2^t \in te_2$
$tk_1 \cap x_{1,2} = N_1 \xrightarrow{ord} N_2 \in tk_2$
$n_2^\tau = N_2^tN_2;\ n_2^\tau \cap x_{1,2} = \tau_x;\ p_1^\tau = \tau_xP_1^t$

### 1.4.5 Rotační paraboloid




Bod $M$ není bodem obrysové kružnice pro půdorysnu ani obrysové paraboly pro nárysnu, musíme ho otočil kolem osy $F \in o \perp \pi$ do roviny obrysové paraboly pro nárysnu, která je rovnoběžná s nárysnou s prochází osou $o$. Najdeme řídící přímku, vrchol a dostatečný počet obecných bodů obrysové elipsy a odvodíme půdorysný průmět. V otočeném bodě $M_o$ sestrojíme pomocnou tečnu obrysové paraboly, která nám určí vrchol $K$ tečné kuželové plochy, kterým prochází i tečna paraboly bodu $M$, doplníme tečnu rovnoběžky bodu a tak určíme tečnou rovinu.

1. otočíme obecný bod $M$ do roviny obrysové paraboly
$M_1 \in k_M(F_1);\ M_1^oF_1 \parallel x_{1,2}$
$M_2M_2^o \parallel x_{1,2};\ M_1^o \xrightarrow{ord} M_2^o$

2. sestrojíme řídící přímku $d$ paraboly, podle definice pro parabolu platí:
   $|F_2M_2^o| = v(M_2^o d_2) \wedge d_2 \perp o_2 \Longrightarrow Q_2M_2^o \parallel o_2 \wedge |Q_2M_2^o| = |F_2M_2^o|$
   $Q_2 \in d_2 \perp o_2;\ d_2 \cap o_2 = D_2$

3. vrchol $V_2$ je střed úsečky $F_2D_2$

4. oskulační kružnice:
   poloměr $r = |F_2D_2| = p \ldots$ parametr paraboly
   střed $S_o \in o_2$ a platí $|S_oV_2| = |F_2D_2|$ neboli $|S_oF_2| = |F_2V_2|$

5. průsečíky obrysové paraboly a osy $x_{1,2}$:
   $|0D_2| = |F_2X_2| = |F_2X_2'|$

6. konstrukce obecných bodů:
   sestrojíme libovolnou kolmici na osu $o_2$, vzdálenost jejího průsečíku od bodu $D_2$ kružítkem naneseme od ohniska $F_2$ opět na kolmici, např.
   setrojíme systém kolmic po $1cm$ od $k_2^M$, průsečíky s osou $o_2$ označíme $+1; -1; +2 \ldots$,
   do kručítka vezmeme vzdálenost $|+1D_2|$ a z ohniska $F_2$ naneseme na kolmici procházející bodem $+1$, průsečíky jsou body paraboly
   parabolu zatím nevykreslujeme !

7. sestrojíme tečnu obrysové paraboly v bodě $M_2^o$:
   tečna $tp_2^o$ půlí úhel $\angle M_2^oF_2Q_2$ neboli $M_2^o \in tp_2^o \perp F_2Q_2$
   najdeme vrchol $K$ kužele tečen:
   $tp_2^o \cap o_2 = K_2 \xrightarrow{ord} K_1 = F_1$
   tečna poledníku v bodě $M$:
   $tp_1 = M_1F_1;\ tp_2 = M_2K_2$ (čárkovaně)

8. tečna rovnoběžky v bodě $M$:
   $M_1 \in tk_1 \perp M_1F_1;\ M_2 \in tk_2 \parallel x_{1,2}$ (čárkovaně)

9. viditelnost:
   $M_1$ - viditelný $\Longrightarrow tp_1, tk_1$ viditelné přes $\pi-$průmět
   $M_2$ - neviditelný ($M_1$ mezi $X_1X_1'$ a $x_{1,2}$) $\Longrightarrow tp_2, tk_2$ viditelné mimo $\nu-$průmět
   v půdorysně šrafujeme přes obrysovou křivku až k bodu $M_1$
   v nárysně šrafujeme po obrysovou křivku, ne až k bodu $M_2$