A vizsgált egyenlet egy klasszikus **transzcendens egyenlet**, amely az algebrai és a logaritmikus struktúrák keveredése miatt rendkívül izgalmas módszertani példa.

1. Értelmezési tartomány és ekvivalens átalakítások

A logaritmusfüggvény definíciója miatt a 2^x kifejezés mindig pozitív, míg az x^2 kifejezés megköveteli, hogy $x \neq 0$. Ebből adódóan a valós számok halmazán az értelmezési tartomány:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A logaritmus azonosságait ($\ln(a^b) = b \cdot \ln a$) alkalmazva – ügyelve arra, hogy a negatív x értékeknél $\ln(x^2) = 2\ln|x|$ – az egyenlet az alábbi lineáris-logaritmikus vegyes alakra hozható:

$$(20 \ln 2)x + 54 \ln |x| = 10$$

2. Miért nem oldható meg elemi algebrával?

Az egyenletben az ismeretlen (x) egyszerre szerepel lineáris tagként (polinomként) és a logaritmus argumentumában is. Az ilyen típusú egyenletek izolálása – azaz x kifejezése a hagyományos elemi algebrai műveletekkel (összeadás, szorzás, gyökvonás, standard logaritmusok) – **matematikailag igazolhatóan lehetetlen**.

3. Zárt alakú megoldás: A Lambert-féle W-függvény

Bár elemi úton nem kezelhető, a felsőbb matematikában ismert **Lambert-féle W-függvény** (amely az $f(w) = w \cdot e^w$ transzcendens függvény inverze) segítségével az egyenletnek felírható a **pontos, zárt alakú analitikus megoldása**.

Az egyenletet rendezve és a W-függvény definícióját alkalmazva a valós gyökök az alábbi formulákkal adhatók meg hajszálpontosan:

- **A pozitív gyök ($x > 0$):**

$$x_3 = \frac{27}{10 \ln 2} W_0\left(\frac{10 \ln 2}{27} e^{\frac{5}{27}} \right) \approx 0,94435681$$

- **A negatív gyökök ($x < 0$):**
  Mivel a W-függvény argumentuma a negatív tartományban a kritikus $[-1/e; 0]$ sávba esik, a függvény két valós ága (W_0 főág és W_{-1} mellékág) miatt két különálló negatív megoldást kapunk:

$$x_2 = \frac{27}{10 \ln 2} W_0\left(-\frac{10 \ln 2}{27} e^{\frac{5}{27}} \right) \approx -2,02279198$$

$$x_1 = \frac{27}{10\ln 2}\, W_{-1}\left(-\frac{10\ln 2}{27}\, e^{\frac{5}{27}}\right) \approx -6,67097763$$

4. Módszertani tanulság a GeoGebra-használatban

Ez a feladat tökéletesen illusztrálja a modern matematikai szoftverek (mint a GeoGebra) létjogosultságát. Míg az analitikus formula felírása komoly egyetemi szintű apparátust igényel, addig a GeoGebra **Grafikus nézetében** a függvények ábrázolásával (a metszéspontok keresésével), vagy a **CAS nézet** `NumerikusMegoldás` (`NSolve`) parancsával a diákok azonnal és szemléletesen megkaphatják ezt a három különleges valós gyököt.