Cuboctaedro

Explorando as possibilidades de estudo do poliedro

Nível de ensino: Segundo ou terceiro ano do ensino médio.

Conteúdos envolvidos: Poliedros, elementos de um poliedro (face, aresta e vértice), relação de Euler, poliedros convexos e não convexos, poliedros truncados, secções de um poliedro e área e volume de um poliedro truncado a partir de poliedros mais simples.

Objetivos:

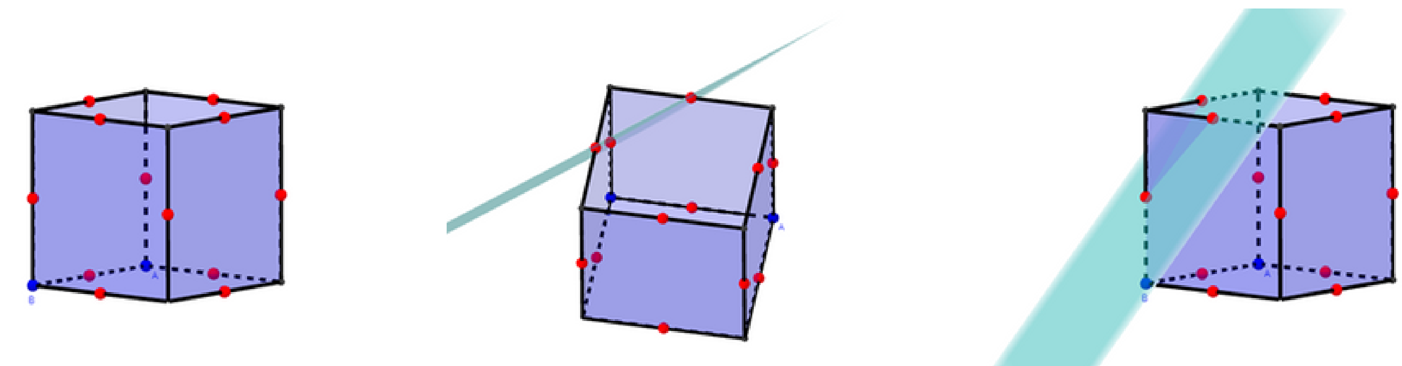
- Explorar o cuboctaedro:
- Identificar os elementos do cuboctaedro;
- Reconhecer o cuboctaedro a partir de secções do cubo;
- Reconhecer o cuboctaedro a partir de secções do octaedro;
- Determinar a área do cuboctaedro a partir das medidas do cubo;
- Determinar o volume do cuboctaedro a partir das medidas do cubo.

Primeiros passos - Incentivando a investigação

Para iniciar o estudo antes de entregar o objeto instigue os estudantes com as seguintes perguntas:

a) Como você imagina que é um cuboctaedro?
b) O que é o cubocatedro? Um conceito, teorema ou objeto matemático?
c) A palavra cuboctaedro te remete a algum objeto matemático que você conhece?

Parece natural que o estudante associe a nomenclatura do cuboctaedro ao cubo ou ainda ao octaedro. Também espera-se que ele conclua que trata de um poliedro se perceber o sufixo "edro" na palavra. Supondo que o estudante chegue à conclusão que é um poliedro e que tenha alguma associação ao cubo, questione qual associação seria essa. Para auxiliar entregue um cubo e peça para ele imaginar um plano cortando uma "ponta" do cubo de modo que o plano contenha os pontos médios de três arestas consecutivas entre si.



Questione novamente o estudante:

d) Se conseguíssemos retirar a parte do cubo seccionada pelo plano que objeto teríamos em mãos? É um objeto conhecido? Quais são as características desse objeto?

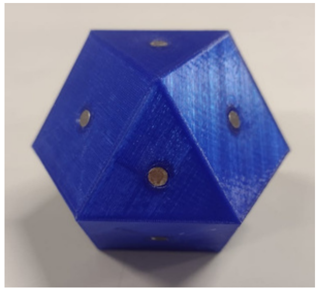
e) E se repetirmos o mesmo processo para as demais pontas do cubo, qual objeto restaria após todas as secções? É um objeto conhecido? Quais são as características desse objeto?

Nesse ponto do estudo basta conseguir concluir junto ao estudante que a partir de um cubo conseguimos realizar secções e obter um novo poliedro. Não é necessário ainda informar ao estudante que se trata do cuboctaedro, quais são as características de fato e outras formas de obtenção do cuboctaedro, pois tais pontos serão estudados a seguir.

Obs.: Caso o estudante questione se o novo poliedro é o cuboctaedro você pode perguntar porque o nome seria cuboctaedro e não “cubedro” ou “cuboedro”. O que significaria o “octa” na nomenclatura do poliedro?

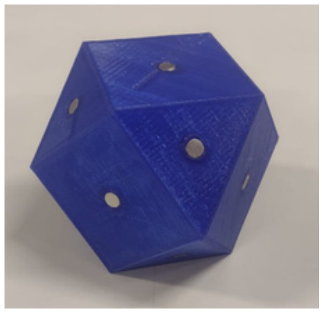
Etapa 1 - Explorando o objeto

Entregue o cuboctaedro ao estudante e peça para ele observar as características desse poliedro. Para auxiliar na exploração o professor pode fazer as seguintes perguntas:



a) Na matemática como podemos chamar esse objetivo de forma geral?
Resposta possível: Trata-se de um poliedro, ou seja, um sólido em três dimensões com faces poligonais planas, bordas retas e cantos ou vértices acentuados.

b) Como são as faces desse poliedro?
Resposta possível: O poliedro possui faces quadrangulares e triangulares.



c) Quantas são as faces quadrangulares e triangulares, respectivamente?
Resposta possível: 6 faces quadrangulares e 8 faces triangulares.

d) Quantos vértices possui esse poliedro?
Resposta possível: 12 vértices.

e) Quantas arestas possui esse poliedro?
Resposta possível: 24 arestas.

f) Verifique se a relação de Euler é válida, ou seja, $F + V - A = 2$.
Resposta possível: Sim é válida pois $(6+8) +12 - 24 =2$

g) É um poliedro convexo ou côncavo?
Resposta possível: Convexo.

Se necessário relembre o conceito de poliedro convexo e côncavo com o estudante.

- <u>Convexo:</u> um poliedro é convexo se qualquer segmento com extremidades dentro do poliedro estiver totalmente contido no poliedro.
- <u>Côncavo:</u> um poliedro é côncavo se existir algum segmento com extremidades dentro do poliedro possuir pontos fora do poliedro.

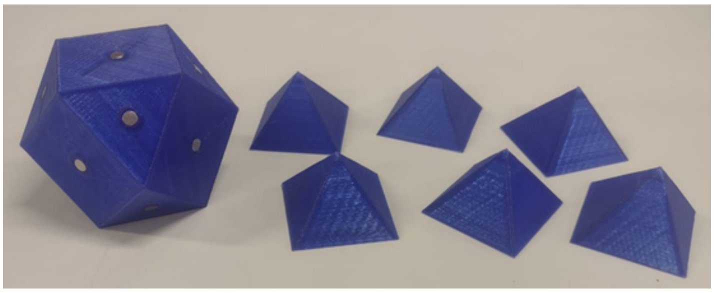
Observação: todo poliedro convexo obedece à relação de Euler, já os poliedros côncavos podem obedecê-la ou não.

Etapa 2 - Adicionando as pirâmides quadrangulares

Peça para o estudante separar as peças que são pirâmides maiores.

Questione o estudante:

a) De que tipo são essas pirâmides? Pirâmides triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc.?
Resposta possível: Pirâmides quadrangulares



Solicite ao estudante que tente notar qual o novo poliedro que será formado quando adicionar as 6 pirâmides quadrangulares. Inicialmente peça a ele para tentar visualizar quantas faces terá esse novo poliedro.

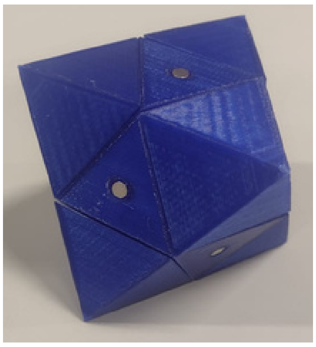
Oriente o estudante a observar o novo poliedro a cada peça adicionada, afim de exercitar a visualização.

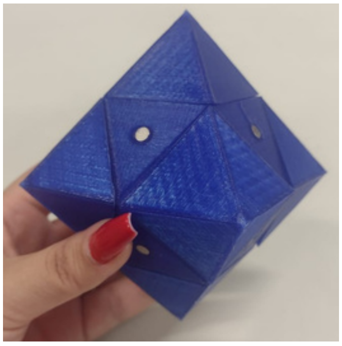
b) Colocando uma peça, você consegue dizer qual seria o poliedro formado quando adicionar as 6 peças? E se adicionasse 2?

Para acompanhar esse processo de visualização peça para o estudante preencher a seguinte tabela.

Peças adicionadas	Quantas faces você visualiza que terá o novo poliedro?
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Finalizando o encaixe de todas as pirâmides quadrangulares podemos observar que o novo poliedro é um octaedro, possuindo 8 faces.





c) Quantos vértices possui o octaedro?
Resposta possível: 6 vértices

d) Quantas arestas possui o octaedro?
Resposta possível: 12 arestas.

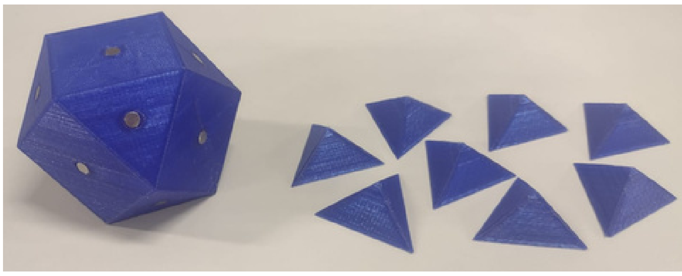
f) Verifique se a relação de Euler é válida, ou seja, F + V - A = 2.
Resposta possível: Sim é válida pois (6+8) +12 - 24 =2

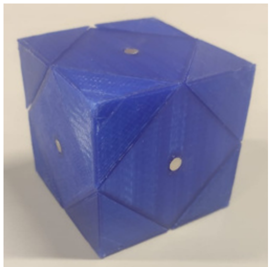
g) É um poliedro convexo ou côncavo?
Resposta possível: Convexo.

Etapa 3 - Adicionando as pirâmides triangulares

De maneira semelhante ao que foi realizado na etapa anterior, peça ao estudante para retirar as pirâmides quadrangulares e agora adicionar as pirâmides triangulares uma a uma tentando compreender qual poliedro se formará após o encaixe de todas as peças.

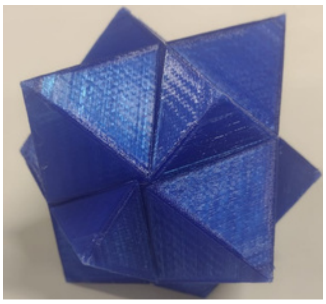
Ao final, espera-se que o estudante reconheça que o poliedro formado é um cubo, sendo formado por 6 faces, 8 vértices e 12 arestas. Além disso, é válida a relação de Euler e se trata de um poliedro convexo.





Etapa 4 - Poliedro estrelado

Peça ao aluno para adicionar novamente as pirâmides quadrangulares, mas desta vez sem retirar as pirâmides triangulares.



Questione o estudante:

a) Quais são as características desse novo poliedro? Com o que ele se parece?

b) É um poliedro convexo ou côncavo?

.

Observe junto com o estudante que o poliedro formado é pouco conhecido no ensino básico regular. Tal poliedro pode ser chamado de poliedro estrelado.

Etapa 5 - Cuboctaedro a partir de secções

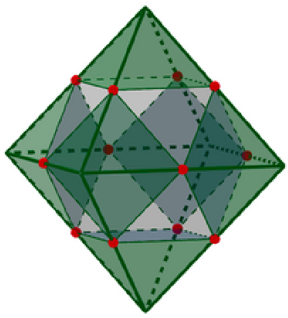
Como observamos no início do nosso estudo, a partir de secções do cubo podemos obter um novo poliedro. No caso dessa atividade, o poliedro obtido foi o cuboctaedro, mas não é somente a partir das secções do cubo que podemos obtê-lo. Nessa etapa de estudo o estudante já deve ter afinidade com o material, então peça para ele encaixar as peças para ter um octaedro em mãos.

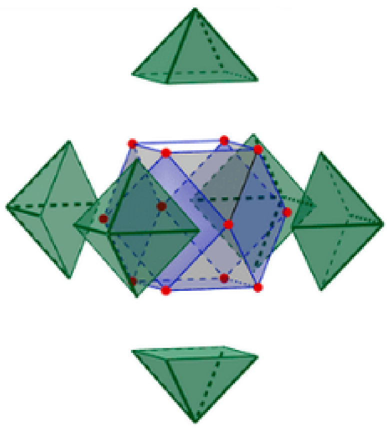
Questione o estudante:

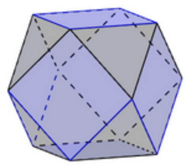
a) Pensando na figura sólida, de que modo específico podemos fazer secções a fim de obter o cuboctaedro?
Resposta possível: Seccionando as "pontas" do octaedro por um plano que corte exatamente nos pontos médios de cada aresta ligada a um vértice.

b) Quantas secções serão necessárias?
Resposta possível: Serão necessárias 6 secções.

c) Quantos e quais objetos obteremos a partir das secções?
Resposta possível: Realizando as secções obteremos 6 pirâmides quadrangulares e restará um cuboctadero do poliedro original.







É provável que o estudante não necessite de auxílio para responder essas questões. Caso necessite faça intervenções mínimas para que ele possa realizar conclusões por si só.
Para finalizar essa etapa, faça a seguinte pergunta para que fique claro os resultados obtidos até aqui.

d) Podemos concluir que o cuboctaedro pode ser obtido pelas secções de quais poliedros?
Resposta possível: Podemos obter o cuboctaedro a partir das secções de um octaedro ou de um cubo.

Etapa 6 - Determinação da área do cuboctaedro a partir das medidas do cubo

O objetivo nessa etapa é que o estudante consiga deduzir a fórmula da área do cuboctaedro a partir do cubo seguindo algumas orientações dadas pelo professor mas com o mínimo de intervenção possível.

Peça ao estudante para considerar um cubo com aresta medindo *a*. Já sabemos através das etapas anteriores que seccionando o cubo podemos obter o cuboctaedro, o qual possui possui 6 faces quadrangulares e 8 faces triangulares. Instigue o estudante a pensar na dedução da fórmula.

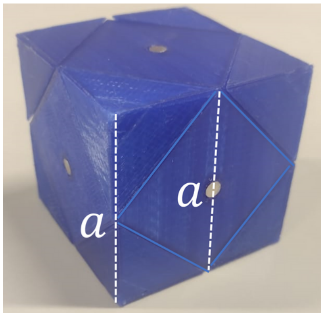
a) Como podemos calcular a área do cuboctaedro a partir da medida da aresta do cubo seccionado? Saber que o cuboctaedro possui 6 faces quadrangulares e 8 faces triangulares auxilia na dedução?

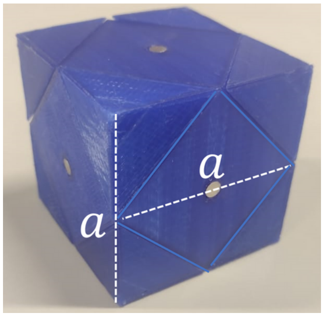
Resposta possível: Para calcular a área do cuboctaedro basta calcular a área de todas as faces individualmente com base na medida da aresta do cubo seccionado e somar os seus valores. Como são 6 faces quadrangulares iguais e 8 faces triangulares podemos calcular a área de uma face quadrangular e multiplicar por 6 e calcular a área de uma face triangular e multiplicar por 8~~, ao~~ final somamos esses valores e obtemos a área total do cuboctaedro.

Vamos começar calculando área de uma face quadrangular. Sabemos que a área de um quadrado é a medida do seu lado ao quadrado, logo se descobrirmos quanto é a medida do lado da face quadrangular conseguiremos calcular a área da face. Questione o estudante:

b) Como podemos relacionar a medida da aresta do cubo com a face quadrangular do cuboctaedro?

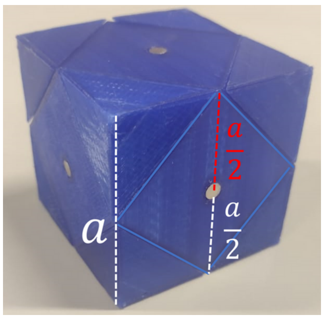
Lembre que para obter o cuboctaedro a partir do cubo realizamos secções cujos planos cortam exatamente nos pontos médios das arestas do cubo. Com isso podemos concluir que se a aresta do cubo é *a* então a diagonal da face quadrangular também é *a*.

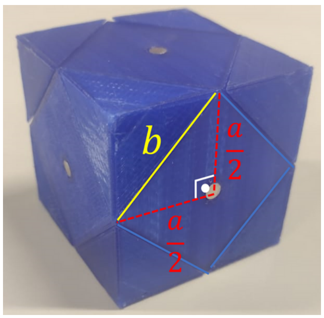




Consequentemente a medida de cada vértice da face quadrangular até o centro da face é *a/2.*

c) Como podemos calcular a medida do lado da face quadrangular? Algum triângulo pode auxiliar no processo?





Note que podemos considerar o triângulo retângulo destacado na figura acima, sendo *b* a medida do lado da face quadrangular do cuboctaedro. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos que

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$b^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$b = \sqrt{\frac{2a^2}{4}}$$

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo a medida do lado da face quadrangular é

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Já que a face quadrangular é um quadrado para encontrar a área basta calcular *b* ao quadrado.

$$b^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Como são 6 faces quadrangulares então a soma de todas as áreas quadrangulares é

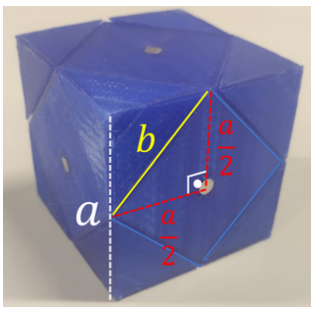
$$\frac{6a^2}{2} = 3a^2$$

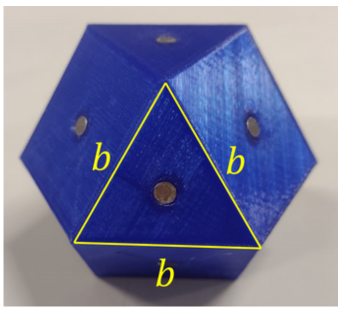
Agora vamos calcular a área das faces triangulares.

d) Como podemos relacionar a medida da aresta do cubo com a face triangular do cuboctaedro?
Resposta possível: A medida do lado da face triangular é a mesma medida do lado da face quadrangular, a qual já calculamos a partir da medida da aresta do cubo.

e) É possível identificar a classificação referente aos lados do triângulo da face triangular?
Resposta possível: Sim, é um triângulo equilátero de lado *b*.

Essas conclusões não devem ser complicadas para o estudante realizar a partir da manipulação e visualização do cuboctaedro, mas caso seja necessário auxilie o estudante o mínimo possível para que ele possa chegar nessas observações.





Como a face é um triângulo equilátero de lado *b* para calcularmos a sua área basta calcular

$$\frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

Substituindo o valor de *b* obtemos:

$$\frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2}{4}\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

Como são 8 faces triangulares então a soma de todas as áreas triangulares é

$$\frac{8a^2\sqrt{3}}{8} = a^2\sqrt{3}$$

Por fim vamos somar as áreas de todas as faces do cuboctaedro, ou seja,

$$3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3+\sqrt{3})$$

sendo *a* a medida da aresta do cubo seccionado para obter o cuboctaedro.

f) Note que obtemos uma fórmula para o cálculo da área do cuboctaedro que depende da aresta do cubo. Como podemos reescrever a fórmula para que dependa apenas da aresta do cuboctaedro?
Resposta possível: Chamamos a aresta do cuboctaedro de *b* e determinamos o valor de *b* em relação a *a*, logo basta usarmos essa relação para reescrever a fórmula. Temos então,

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b\sqrt{2} = a$$

$$\text{Área } do\ cuboctaedro = a^2\left(3+\sqrt{3}\right) = \left(b\sqrt{2}\right)^2\left(3+\sqrt{3}\right)$$

$$= 2b^2\left(3+\sqrt{3}\right) = b^2\left(6+2\sqrt{3}\right)$$

Etapa 7 - Determinação do volume do cuboctaedro a partir das medidas do cubo

De maneira semelhante ao que realizamos na etapa anterior, agora nosso objetivo é deduzir a fórmula do volume do cuboctaedro a partir das medidas do cubo. Para isso considere novamente um cubo cuja aresta tem medida *a*. Realizando as secções necessárias nesse cubo para obter o cuboctaedro restará 8 pirâmides triangulares além do próprio cuboctaedro. Questione o estudante:

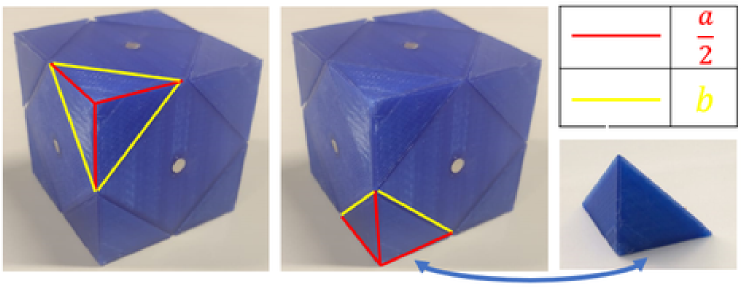
a) A partir das medidas do cubo como podemos calcular o volume do cuboctaedro? Qual a diferença entre o volume do cubo e do cuboctaedro?
Resposta possível: A diferença entre o volume dos dois poliedros é a soma dos volumes das 8 pirâmides triangulares obtidas no processo de secção do cubo, logo podemos calcular o volume do cuboctaedro calculando o volume do cubo e subtraindo a soma dos volumes das 8 pirâmides triangulares.

b) Qual é o volume do cubo sabendo que a medida da sua aresta é *a*?
Resposta possível: Podemos calcular o volume de um cubo elevando a medida de sua aresta ao cubo, neste caso

$$Vol.cubo = a^3$$

c) Como podemos calcular o volume das pirâmides triangulares?

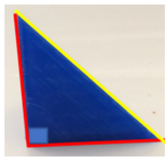
Observe que a pirâmide é tri-retangular, ou seja, três faces são triângulos retângulos isósceles cujos catetos medem *a/2*.



Lembre que podemos calcular o volume de uma pirâmide qualquer através da seguinte fórmula:

$$Vol.pirâmide = \frac{1}{3}\,.Ab\,.h$$

sendo *Ab* a área da base e *h* a altura.



Observe que a altura da pirâmide é igual a *a/2* . Agora temos que calcular qual a área da base da pirâmide. Note que a base é um dos triângulos retângulos isósceles com catetos *a/2* e hipotenusa igual a *b*.

Realizando os cálculos temos:

$$Ab = \left(\frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right)/2 = \frac{a^2}{4}.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{8}$$

Logo,

$$Vol.pirâmide = \frac{1}{3}.Ab.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{8}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$$

Como são 8 pirâmides triangulares, então a soma do volume de todas as pirâmides é:

$$\frac{8a^3}{48} = \frac{a^3}{6}$$

Portanto o volume do cuboctaedro é

$$Vol.cuboctaedro = Vol.cubo - 8.Vol.pirâmide$$

$$= a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5a^3}{6}$$

onde *a* é a aresta do cubo.

d) Note que obtemos uma fórmula para o cálculo do volume do cuboctaedro que depende da aresta do cubo. Como podemos reescrever a fórmula para que dependa apenas da aresta do cuboctaedro?

Resposta possível: Chamamos a aresta do cuboctaedro de *b* e determinamos o valor de *b* em relação a *a*, logo basta usarmos essa relação para reescrever a fórmula. Temos então,

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow b\sqrt{2} = a$$

$$Vol.\,cuboctaedro = \frac{5a^3}{6} = \frac{5\left(b\sqrt{2}\right)^3}{6} = \frac{5b^3 2\sqrt{2}}{6} = \frac{5b^3\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{2}b^3$$

Finalização da atividade

Fica a cargo do professor a execução dessa atividade podendo ser conduzida cumprindo todas as etapas ou selecionando as etapas que forem mais convenientes de acordo com o planejamento individual de cada professor, contudo devem ser observadas as possíveis adaptações necessárias.

Segue algumas sugestões para o professor finalizar a atividade:

- conduzir uma conversa afim de observar as conclusões e opiniões dos estudantes a respeito da atividade;
- entrega de ficha de acompanhamento da atividade preenchida ao longo do desenvolvimento das etapas;
- propor alguns exercícios teóricos de cálculo de área e volume;
- propor a construção de cuboctaedros de papel com área ou volume pré determinados; e
- associar com outras atividades envolvendo tecnologias digitais;

Você pode acessar algumas dessas sugestões e o material escrito da atividade através do QR CODE a seguir: