

Teoría – Tema 4

CCSS Teoría - 6 - Método directo para obtener la inversa de una matriz

Método directo para obtener matriz inversa

La definición de matriz inversa en matrices cuadradas de orden n nos dice que, si existe, la matriz A^{-1} satisface la siguiente igualdad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Donde I es la matriz identidad de orden n .

Para obtener A^{-1} planteamos el sistema resultante de la ecuación $A \cdot A^{-1} = I$, donde los coeficientes de A^{-1} son incógnitas. Si el resultado es un sistema incompatible, implica que no existe matriz inversa.

Si una matriz A admite inversa, esta inversa es única.

Ejemplo 1 resuelto

¿Existe la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Suponemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $A \cdot A^{-1} = I$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \text{Igualamos a } I \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ 0+3z & 0+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ 3z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} 2x-z=1 \\ 2y-t=0 \\ 3z=0 \\ 3t=1 \end{cases} \rightarrow \text{Resolvemos} \rightarrow t = \frac{1}{3}, \quad z=0, \quad y = \frac{1}{6}, \quad x = \frac{1}{2}$$

Es decir, la matriz inversa resulta $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Y se cumple:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 resuelto

¿Existe la inversa de $B = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$?

Suponemos que $B^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ y planteamos la igualdad $B \cdot B^{-1} = I$.

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \rightarrow \text{Igualamos a } I \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos las dos matrices del lado izquierdo de la igualdad.

$$\begin{pmatrix} -6x-3z & -6y-3t \\ 4x+2z & 4y+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término hasta formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} -6x-3z=1 \\ -6y-3t=0 \\ 4x+2z=0 \\ 4y+2t=1 \end{cases} \rightarrow \text{Resolvemos por Gauss} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = 6 \cdot F_3 + 4 \cdot F_1,$$

$$F'_4 = 6 \cdot F_4 + 4 \cdot F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -6 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \text{Encontramos incongruencias en las filas } F_3 \text{ y } F_4$$

$F_4 \rightarrow$ Sistema incompatible $\rightarrow$ No existe solución $\rightarrow$ La matriz B no admite inversa.