Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 5 - cociente de polinomios con raíces múltiples

Grado del numerador $P(x)$ menor que Grado del denominador $Q(x)$ y raíces múltiples en el denominador

En este segundo caso de integrales de cociente de polinomios, el polinomio del denominador podemos factorizarlo en raíces reales múltiples.

Recuerda: el grado del numerador debe ser inferior al grado del denominador.

Supongamos que el denominador posee una única raíz $x=x_1$ de multiplicada n (es decir, el valor $x=x_1$ aparece n veces como raíz del denominador).

$$Q(x)=(x-x_1)^n$$

Y el cociente de polinomios podemos expresarlo como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{N}{(x-x_1)^n}$$

Igualamos los denominadores:

$$P(x) = A \cdot (x-x_1)^{n-1} + B \cdot (x-x_1)^{n-2} + \dots + N$$

Los factores indeterminados $A, B, \dots, N$ podemos conocerlos **dando valores a la variable** x .

Si $x=x_1 \rightarrow$ obtenemos N

Damos valores arbitrarios a $x \neq x_1$ para obtener el resto de factores $A, B, \dots$ a través de un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{2x-1}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3} dx$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$2x-1 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C$$

Si $x=1 \rightarrow 1=C \rightarrow C=1$

Si $x=0 \rightarrow -1=A-B+1$

Si $x=2 \rightarrow 3=A+B+1$

Con las últimas dos ecuaciones formamos un sistema:

$$\begin{cases} -2=A-B \\ 2=A+B \end{cases} \rightarrow A=0, B=2$$

Sustituyendo estos coeficientes en la integral:

$$\int \frac{(2x-1)}{(x-1)^3} dx = \int \left[\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \right] dx = \int \left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx$$

$$\int \left[\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$