Teoría – Tema 2

CCSS Teoría - 8 - cambio de variable

¿Qué es un cambio de variable?

Sea la integral arbitraria $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es una función de variable real x . Puede ocurrir que la forma de la función sea tan compleja que dificulte enormemente el cálculo de la integral indefinida. Y esta dificultad, a veces, puede resolverse realizando un cambio de variable adecuado.

Supongamos que expresamos la variable x en función de una función $g(t)$ que depende de la variable t . Si llevamos esta relación a la integral, tendremos:

$x=g(t) \rightarrow dx=g'(t)dt$ → Diferenciamos en función de x y en función de t

$f(x)=f[g(t)]$

$\int f(x)dx=\int f[g(t)]\cdot g'(t)dt$ → Integral que depende de la variable t

Si conseguimos resolver la integral en función de t , no debemos olvidar **deshacer al final el cambio de variable realizado**. Es decir:

$$x=g(t) \rightarrow g^{-1}(x)=t$$

En consecuencia, la función elegida para el cambio de variable **debe admitir función inversa**, para que podamos deshacer el cambio.

Si tras realizar el cambio de variable en la integral, obtenemos una expresión que depende tanto de x como de t … significa que el cambio de variable no es válido... tendremos que proponer otro.

¿Existe alguna **regla general** que nos permita saber **qué función debemos aplicar en el cambio de variable**? Lamentablemente no. Una posible ayuda es proponer una función que al diferenciar, el resultado de la derivada “se parezca” lo más posible a los términos que tenemos dentro de la integral.

Ejemplo 1 resuelto

$$\int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx$$

$$\ln x=t \rightarrow \frac{1}{x}dx=dt \rightarrow dx=x\cdot dt \rightarrow \int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx=\int \frac{tg[t]\cdot x}{x}dt=\int tg(t)dt$$

$\int tg(t)dt=\int \frac{sen\,t}{\cos t}dt=-\ln|\cos(t)|+C$ → deshacer cambio → $-\ln|\cos[\ln(x)]|+C$

Cambio de variable si f(x) contiene sumas y restas de raíces de un mismo radicando elevado a distintos índices.

Sea la integral $\int f(x)dx$. Si la forma de la función $f(x)$ contiene un mismo radicando (por ejemplo x) elevado a distintos índices (por ejemplo $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{3}{4}}, \ldots$), podemos plantear el siguiente cambio de variable:

$radicando = t^m$ → Donde m es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces.

Ejemplo 2 resuelto

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Radicando: x

Índice de las raíces: $2,3 \rightarrow m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable → $x = t^6 \rightarrow dx = 6 \cdot t^5 dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}} \cdot 6 \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int \frac{1-t^3}{t^2} \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int (1-t^3) \cdot t^3 dt = 6 \cdot \int (t^3 - t^6) dt$$

$$6 \cdot \int t^3 dt - 6 \cdot \int t^6 dt = \frac{6}{4} \cdot t^4 - \frac{6}{7} \cdot t^7 + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x = t^6 \rightarrow \sqrt[6]{x} = t$$

$$I = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{4}{6}} - \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{7} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x} + C$$

Cambio de variable si f(x) contiene exponenciales de la msima base.

Sea la integral $\int f(x)dx$. Si la forma de la función $f(x)$ contiene exponenciales de la misma base (por ejemplo, en base e) podemos plantear el siguiente cambio de variable:

$$e^x=t$$