1. Átrendezés és alsó becslés

Rendezzük az egyenletet y^3-re:

$$y^3 = x^3 + x^2 + x + 11263$$

Mivel x pozitív egész szám ($x \geq 1$), a jobb oldali kifejezés nyilvánvalóan nagyobb, mint x^3:

$$y^3 > x^3 \Longrightarrow y > x$$

2. Felső becslés (szendvics-elv)

Keressük meg azt a küszöbértéket, amely felett a kifejezés már biztosan kisebb a következő teljes köbnél, azaz $(x+1)^3$-nél:

$$x^3 + x^2 + x + 11263 < (x+1)^3$$

$$x^3 + x^2 + x + 11263 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Az egyenlőtlenséget rendezve:

$$11262 < 2x^2 + 2x \Longrightarrow 5631 < x(x+1)$$

Az $x^2 + x - 5631 = 0$ másodfokú egyenlet pozitív gyöke:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{22525}}{2} \approx 74,54$$

3. Következtetés és kritikus tartomány

- Ha $x \geq 75$, akkor a kifejezésünk két egymást követő teljes köb közé esik:

$$x^3 < y^3 < (x+1)^3$$

  Mivel két egymást követő egész szám köbe között nem állhat egy harmadik egész szám köbe, ebben a tartományban **nincs megoldás**.

- A lehetséges megoldásokat ezért elegendő az $1 \leq x \leq 74$ véges tartományon keresni (például GeoGebra táblázatkezelővel vagy tippelős módszerrel).

4. Megoldás

A korlátos tartományt végignézve egyetlen olyan x érték létezik, amelyre a jobb oldal teljes köböt ad:

- $x = 20$ esetén:

$$y^3 = 20^3 + 20^2 + 20 + 11263 = 8000 + 400 + 20 + 11263 = 19683$$

$$19683 = 27^3 \Longrightarrow y = 27$$

Végeredmény: Az egyenlet egyetlen pozitív egész megoldáspárja az $(20, 27)$.