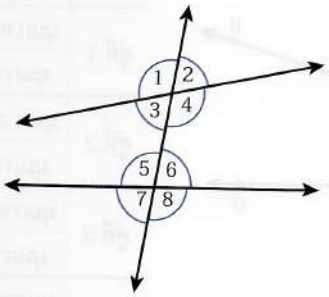
3.3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เรียก $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่า **มุมภายนอก**

เรียก $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$ และ $\hat{6}$ ว่า **มุมภายใน**

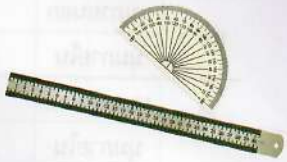
เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$ ว่าเป็น **มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด**

ในทำนองเดียวกัน จะเรียก $\hat{2}$ และ $\hat{6}$, $\hat{7}$ และ $\hat{3}$, $\hat{8}$ และ $\hat{4}$ แต่ละคู่ว่าเป็น **มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด** ด้วย

กิจกรรม : สำรวจมุมภายนอกและมุมภายใน

อุปกรณ์

- ไม้บรรทัด
- โพรแทรกเตอร์



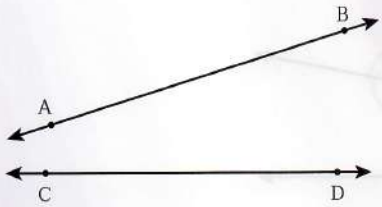
ขั้นตอนการทำกิจกรรม

1. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ **ไม่ขนานกัน** ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้น แล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

มุมเทคโนโลยี

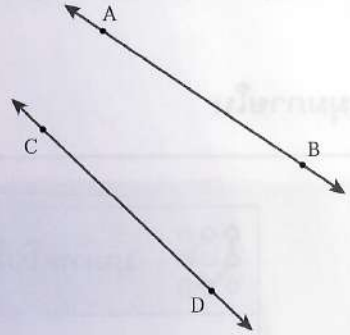
นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อสำรวจเพิ่มเติมเกี่ยวกับมุมภายนอกและมุมภายใน ได้ที่ http://ipst.me/9151

1)



	มุม	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 2	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 3	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 4	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		

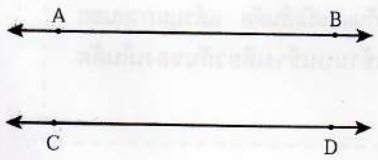
2)



	มุม	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 2	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 3	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 4	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		

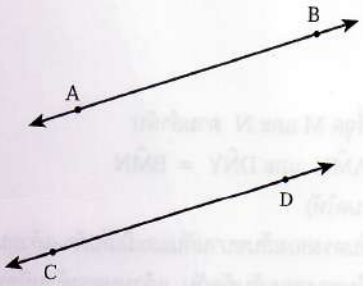
2. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน ให้นักเรียนเขียนเส้นตัด XY ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ โดยให้ จุด M และจุด N เป็นจุดตัดบน $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตามลำดับ จากนั้นให้ระบุว่า มุมคู่ใดบ้างที่เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด พร้อมทั้งวัดขนาดของมุมเหล่านั้นแล้วเติมลงในตารางให้สมบูรณ์

1)



	มุม	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 2	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 3	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 4	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		

2)

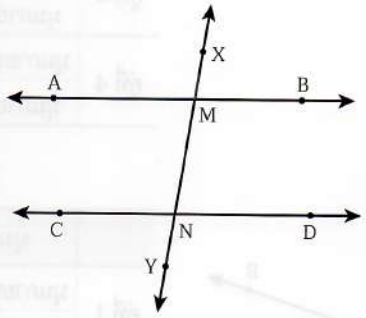


	มุม	ชื่อมุม	ขนาดของมุม
คู่ที่ 1	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 2	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 3	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		
คู่ที่ 4	มุมภายนอก		
	มุมภายใน		

3. จากตารางในข้อ 1 และข้อ 2 ให้นักเรียนสังเกตและสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด กับการขนานกันของเส้นตรงคู่นั้น

จากกิจกรรม : สำรวจมุมภายนอกและมุมภายใน ข้างต้น จะเห็นว่า สิ่งที่สำรวจได้คือ "ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน" ซึ่งเป็นข้อสรุปที่เป็นไปตามทฤษฎีบท ที่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ

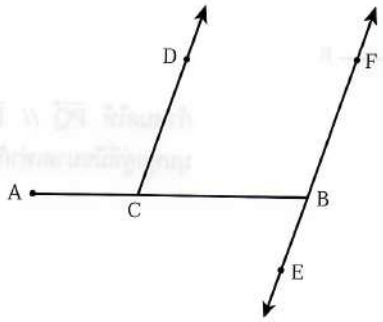
ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{M}X = C\hat{N}M$, $B\hat{M}X = D\hat{N}M$, $C\hat{N}Y = A\hat{M}N$ และ $D\hat{N}Y = B\hat{M}N$

พิสูจน์

	$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$	(กำหนดให้)
	$B\hat{M}N = C\hat{N}M$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)
	$A\hat{M}X = B\hat{M}N$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้วมุมตรงข้ามมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	$A\hat{M}X = C\hat{N}M$	(สมบัติของการเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{M}X = D\hat{N}M$, $C\hat{N}Y = A\hat{M}N$ และ $D\hat{N}Y = B\hat{M}N$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overrightarrow{CD}$ // $\overrightarrow{EF}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด จงอธิบายว่า $A\hat{C}D$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใด



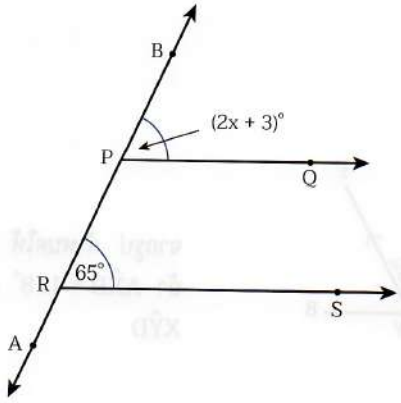
วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{CD}$ // $\overrightarrow{EF}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $A\hat{C}D$ และ $C\hat{B}F$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดที่ตัดเส้นขนาน

ดังนั้น $A\hat{C}D = C\hat{B}F$

ตอบ $C\hat{B}F$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ}$ // $\overrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงหาค่าของ x



วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{PQ}$ // $\overrightarrow{RS}$ และมี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตัด

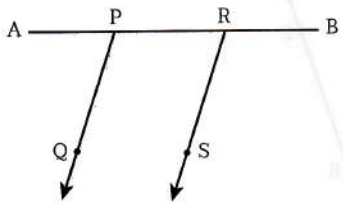
จะได้ $B\hat{P}Q = P\hat{R}S$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $2x + 3 = 65$ (แทน $B\hat{P}Q$ ด้วย $2x + 3$ และ $P\hat{R}S$ ด้วย 65)

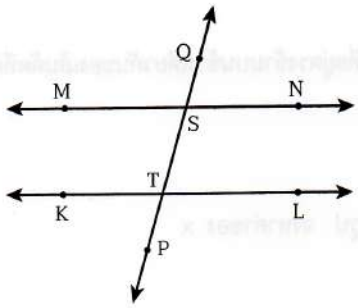
นั่นคือ $x = 31$

ตอบ 31

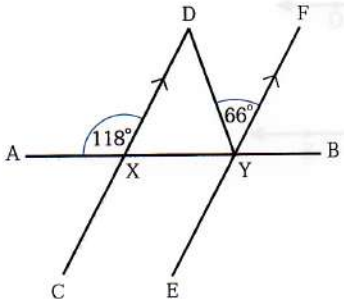
แบบฝึกหัด 3.3 ก

1. 

กำหนดให้ $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด จงหามุมทุกคู่ที่มีขนาดเท่ากัน พร้อมทั้งบอกเหตุผล

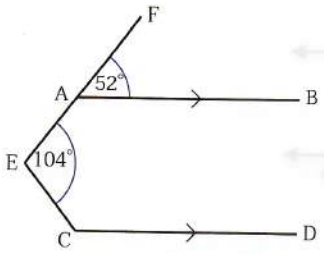
2. 

จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{KL}$ และมี $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด $N\hat{S}T$ มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมใดบ้าง เพราะเหตุใด

3. 

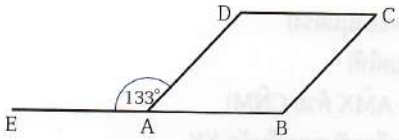
จากรูป กำหนดให้ $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด ถ้า $A\hat{X}D = 118^\circ$ และ $D\hat{Y}F = 66^\circ$ จงหาขนาดของ $X\hat{Y}D$

4.



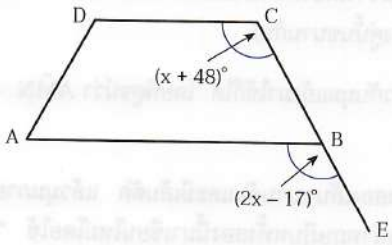
จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} // \overline{CD}$ ถ้า $B\hat{A}F = 52^\circ$ และ $A\hat{E}C = 104^\circ$ จงหาขนาดของ $E\hat{C}D$

5.



จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ถ้ามุมภายนอก $E\hat{A}D = 133^\circ$ จงหาขนาดของมุมแต่ละมุมของ □ABCD

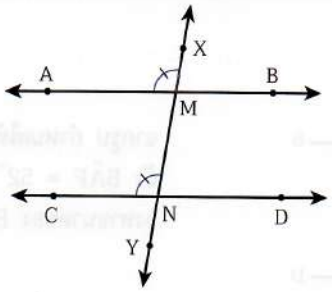
6.



จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มี $\overline{AB} // \overline{CD}$ ถ้า $A\hat{B}E$ เป็นมุมภายนอกมุมหนึ่ง จงหาค่าของ x

ในการตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันหรือไม่ สามารถทำได้อีกวิธีหนึ่งโดยพิจารณาจากขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{XY}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด M และ N ตามลำดับ ทำให้ $A\hat{M}X = C\hat{N}M$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $A\hat{M}X + A\hat{M}N = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

และ $A\hat{M}X = C\hat{N}M$ (กำหนดให้)

จะได้ $C\hat{N}M + A\hat{M}N = 180^\circ$ (แทน $A\hat{M}X$ ด้วย $C\hat{N}M$)

เนื่องจาก $C\hat{N}M$ และ $A\hat{M}N$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด XY

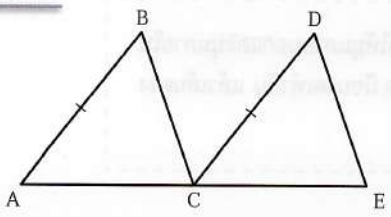
ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180° แล้ว เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ในการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ดังข้างต้น อาจนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้ก็ได้ โดยพิสูจน์ว่า $A\hat{M}N = D\hat{N}M$ หรือ $B\hat{M}N = C\hat{N}M$

ทฤษฎีบทข้างต้น เป็นบทกลับของทฤษฎีบทที่ว่า "ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน" เมื่อนำทฤษฎีบททั้งสองนี้มาเขียนใหม่โดยใช้ "ก็ต่อเมื่อ" จะได้ทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 3



จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = CD$ และ จุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$ จงแสดงว่า $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$

วิธีทำ พิจารณา ΔABC และ ΔCDE

เนื่องจาก $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

จะได้ $B\hat{A}C = D\hat{C}E$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน)

$AB = CD$ (กำหนดให้)

$AC = CE$ (จุด C เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AE}$)

ดังนั้น $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ (ด.ม.ด.)

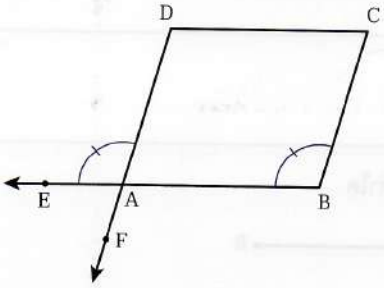
จะได้ $A\hat{C}B = C\hat{E}D$ (มุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)

นั่นคือ $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

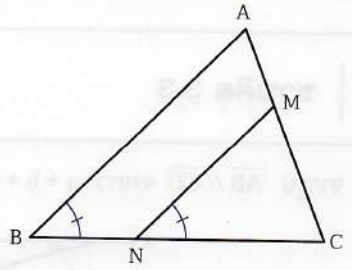
แบบฝึกหัด 3.3 ข

1. จากรูปต่อไปนี้ จงหาว่าส่วนของเส้นตรง รังสี หรือเส้นตรงคู่ใดขนานกัน เพราะเหตุใด

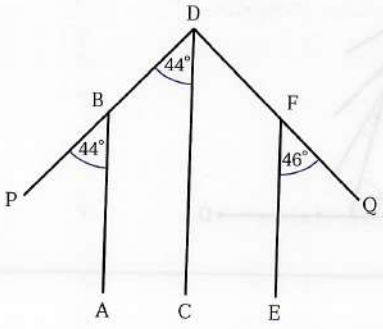
1)



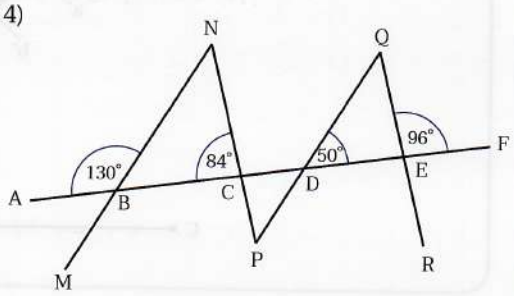
2)



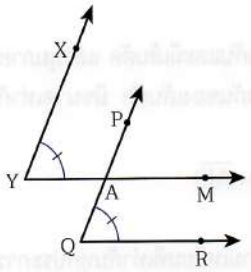
3)



4)

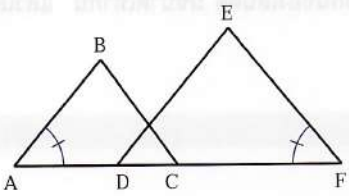


2.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{YM} \parallel \overleftrightarrow{QR}$ และ $X\hat{Y}M = P\hat{Q}R$ จงแสดงว่า $\overleftrightarrow{YX} \parallel \overleftrightarrow{QP}$

3.



จากรูป กำหนดให้ ΔABC และ ΔDEF เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $A\hat{B}C$ และ $D\hat{E}F$ เป็นมุมยอด ถ้า $B\hat{A}C = E\hat{F}D$ จงพิสูจน์ว่า $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ และ $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$

ชวนคิด 3.3

จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ จงหาว่า $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด

