Matriz input-output aplicada a la economía

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach CCSS	Tema 4. Matrices y determinantes	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Ejercicios en contexto económico que necesitan de matrices para determinar el beneficio o el coste de determinada transacción.

Vídeo asociado:

https://youtu.be/XTMA3VK9hf4

DEFINICIÓN DE MATRIZ INPUT-OUTPUT

Una matriz es una matriz input-output cuando las dimensiones de la matriz coinciden con el número de sectores implicados en un sistema económico. El coeficiente a_{ij} indica la cantidad que el sector-j adquiere del sector-i.

Un ejemplo para clarificar: Tres familias A, B y C van de vacaciones a una ciudad donde hay tres hoteles X, y Z.

La familia A necesita 2 habitaciones dobles y una habitación sencilla.

La familia B necesita 3 habitaciones dobles y una habitación sencilla.

La familia C necesita una habitación doble y 2 habitaciones sencillas.

En el hotel X el precio de la habitación doble es de 84€/día y el de la habitación sencilla es de 45€/día.

En el hotel Y la habitación doble cuesta 86€/día y la sencilla 43€/día.

En el hotel Z la habitación doble cuesta 85€/día y la sencilla 44€/día.

La matriz que refleja el número de habitaciones de cada tipo que necesita cada familia es:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cc} D & S \end{array} \\ \begin{array}{r} familia\ A \rightarrow \\ famila\ B \rightarrow \\ familia\ C \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es una matriz $P_{3\times2}$ donde 3 es el número de familias y 2 es el número de tipos de habitación diferentes que cada familia necesita.

La matriz que refleja el precio en cada hotel de cada tipo de habitación es:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{r} D \rightarrow \\ S \rightarrow \end{array} & \begin{pmatrix} 84 & 86 & 85 \\ 45 & 43 & 44 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resulta una matriz $Q_{2\times3}$ donde 2 es el número de tipos de habitaciones distintas que ofrece cada hotel y 3 es el número de hoteles disponibles.

Si multiplicamos $P \cdot Q$ el resultado es una matriz input-output de dimensión 3x3 que nos informa del gasto de cada familia en cada uno de los hoteles.

$$P\cdot Q=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}84 & 86 & 85\\ 45 & 43 & 44\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}213 & 215 & 214\\ 297 & 301 & 299\\ 174 & 172 & 173\end{pmatrix}$$

Por ejemplo: el coeficiente de la fila 1 columna 2, cuyo valor es 215, nos indica lo que debe pagar la familia 1 (familia A) cada noche que pase en el hotel 2 (hotel Y). Es decir, indica el dinero que adquiere el hotel 2 (hotel Y) por la familia 1 (familia A).

La matriz $P\cdot Q$ resultante es una matriz input-output, donde el coeficiente a_{ij} indica la cantidad que el hotel-j adquiere de la familia-i.

PROBLEMA 1

Una fábrica de electrodomésticos ha vendido en los últimos tres años lavadoras (L) y secadoras (S). La matriz A expresa las unidades vendidas cada año. La matriz B indica el precio de venta de cada año, en euros.

$$Matriz\ A\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c} \\ L\rightarrow \\ S\rightarrow\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}2013 & 2014 & 2015\end{array}\\ \begin{pmatrix}3500 & 7500 & 4200\\ 2200 & 6000 & 5300\end{pmatrix}\end{array}$$

$$Matriz\ B\rightarrow\rightarrow\begin{array}{c} \\ 2013\rightarrow \\ 2014\rightarrow \\ 2015\rightarrow\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}L & S\end{array}\\ \begin{pmatrix}480 & 370\\ 460 & 360\\ 500 & 340\end{pmatrix}\end{array}$$

a) Halla la matriz $B\cdot A$. ¿Cuánto se ingresó cada año por la venta de esos electrodomésticos? ¿Qué elementos de la matriz dan esa información?

b) ¿En qué orden hay que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por venta de cada electrodoméstico durante esos tres años? ¿Qué elementos de la matriz dan esa información?

a)

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}480 & 370\\ 460 & 360\\ 500 & 340\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3500 & 7500 & 4200\\ 2200 & 6000 & 5300\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2494000 & 3822000 & 3977000\\ 2402000 & 5610000 & 3840000\\ 2498000 & 3594000 & 3902000\end{pmatrix}$$

Tenemos tres años: año 1 (2013), año 2 (2014), año 3 (2015).

Tenemos dos tipos de electrodomésticos: electrodoméstico 1 (Lavadora), electrodoméstico 2 (Secadora).

Solo los coeficientes de la diagonal principal c_{ij} indican el dinero recibido por ambos electrodomésticos en el año-i.

Ingresos del año 1 (2013) por ambos electrodomésticos:

$c_{11}=2.494.000€$

Ingresos del año 2 (2014) por ambos electrodomésticos:

$c_{22}=5.610.000€$

Ingresos del año 3 (2015) por ambos electrodomésticos:

$c_{33}=3.902.000€$

b) Si ahora multiplicamos en sentido inverso, la matriz input-output resultante es de orden 2x2.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}7230000 & 5423000\\ 6466000 & 4776000\end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal nos informan del dinero ingresado por cada electrodoméstico en esos tres años.

Ingresos por el electrodoméstico 1 (Lavadora) en los tres años:

$c_{11} = 7.230.000€$

Ingresos por el electrodoméstico 2 (Secadora) en los tres años:

$c_{22} = 47.760.000€$

PROBLEMA 2

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples. El segundo necesita dos individuales, doce dobles y cinco triples. El tercer instituto requiere una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.

b) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?

c) ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifica las respuestas.

a) Matriz A: precio de cada agencia según tipo de habitación.

$$A = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix}$$

Fila 1: Precios de la Agencia 1 para cada tipo de habitación.

Fila 2: Precios de la Agencia 2 para cada tipo de habitación.

Columna 1: Precios de habitación individual en cada agencia.

Columna 2: Precios de la habitación doble en cada agencia.

Columna 3: Precios de la habitación triple en cada agencia.

Matriz D: Solicitud de cada instituto para cada tipo de habitación.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ 1 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Fila 1: Número de habitaciones que necesita el Instituto 1 de cada tipo.

Fila 2: Número de habitaciones que necesita el Instituto 2 de cada tipo.

Fila 3: Número de habitaciones que necesita el Instituto 3 de cada tipo.

Columna 1: Número de habitaciones individuales vinculada a cada instituto.

Columna 2: Número de habitaciones dobles vinculada a cada instituto.

Columna 3: Número de habitaciones triples vinculada a cada instituto.

b) Para obtener el coste económico que debe asumir cada instituto, debemos multiplicar la matriz A de precios por la matriz D de demanda.

¡Pero ojo! Si multiplicamos A·D, las filas de precios de cada agencia se multiplicaría por cada columna de D que representa el número de habitaciones para institutos diferentes.

Necesitamos multiplicar las filas de precios de A por el número de habitaciones de un mismo instituto, para obtener el coste total a pagar por cada instituto a cada agencia. Por lo tanto, calculamos la traspuesta de D.

$$D^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D^t = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Podemos realizar este producto porque el número de columnas de A es 3 y coincide con el número de filas de la traspuesta de D.

El resultado del producto es una matriz 2x3 (mismo número de filas de A y mismo número de columnas que la traspuesta de D):

$$A \cdot D^t = \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D^t = \begin{pmatrix} 65 \cdot 3 + 85 \cdot 15 + 104 \cdot 2 & 65 \cdot 2 + 85 \cdot 12 + 104 \cdot 5 & 65 \cdot 1 + 85 \cdot 16 + 104 \cdot 7 \\ 78 \cdot 3 + 83 \cdot 15 + 106 \cdot 2 & 78 \cdot 2 + 83 \cdot 12 + 106 \cdot 5 & 106 \cdot 1 + 83 \cdot 16 + 106 \cdot 7 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot D^t = \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix}$$

El coeficiente c_{11} ofrece el precio de la Agencia 1 para todas las habitaciones del Instituto 1.

El coeficiente c_{12} ofrece el precio de la Agencia 1 para todas las habitaciones del Instituto 2.

El coeficiente c_{13} ofrece el precio de la Agencia 1 para todas las habitaciones del Instituto 3.

El coeficiente c_{21} ofrece el precio de la Agencia 2 para todas las habitaciones del Instituto 1.

El coeficiente c_{22} ofrece el precio de la Agencia 2 para todas las habitaciones del Instituto 2.

El coeficiente c_{23} ofrece el precio de la Agencia 2 para todas las habitaciones del Instituto 3.

Comparando coeficientes de la primera columna, al Instituto 1 le interesa elegir la Agencia 1 porque 1678 < 1691.

Comparando coeficientes de la segunda columna, al Instituto 2 le interesa elegir también la Agencia 1 porque 1670 < 1682.

Comparando coeficientes de la tercera columna, al Instituto 3 le interesa elegir la Agencia 2 porque 2153 > 2148.

c) La matriz D admite inversa si su determinante es distinto de 0.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 2 \\ 2 & 12 & 5 \\ 1 & 16 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow Sarrus \rightarrow |D| = -83 \rightarrow Existe\ inversa\ de\ D$$

Lo mismo podemos decir de la traspuesta de D, ya que el determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta.

La matriz A no admite inversa porque no es una matriz cuadrada. Solo las matrices cuadradas pueden admitir inversa, en el caso de que su determinante fuese distinto de 0.

PROBLEMA 3

Un agricultor vende la producción de tres tipos de uva, Tempranillo, Garnacha y Macabeo, de dos de sus fincas. La matriz $Q = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix}$ recoge la producción, en miles de kilogramos, de estos tipos de uva en cada finca. El precio de venta por kilogramo, en céntimos de euro, según el tipo de uva y la finca, viene dado por la matriz $P = \begin{pmatrix} 40 & 38 & 42 \\ 34 & 37 & 40 \end{pmatrix}$.

Calcule el producto $Q \cdot P^t$ y explique el significado económico de los elementos de la diagonal principal del resultado. Indique también la cantidad total de dinero que ha obtenido el agricultor por la venta de la cosecha de las dos fincas.

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 50 & 40 & 35 \\ 0 & 60 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 & 34 \\ 38 & 37 \\ 42 & 40 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot P^t = \begin{pmatrix} 4990 & 4580 \\ 4590 & 4420 \end{pmatrix}$$

En este producto, la primera fila de Q representa los kg de cada tipo de uva en la primera finca. Mientras que la primera columna de P^t indica el precio de venta de cada tipo de uva. Por lo tanto, al multiplicar la primera fila de Q con la primera columna de P^t obtendremos el precio de venta de todas las uvas de la primera finca. Este producto sería el elemento (Fila 1, Columna 1) de la diagonal principal. Por lo que 4.990 euros es el precio de venta de todas las uvas de la finca 1.

La primera fila de Q representa los kg de cada tipo de uva en la segunda finca. Mientras que la primera columna de P^t indica el precio de venta de cada tipo de uva. Por lo tanto, al multiplicar la segunda fila de Q con la segunda columna de P^t obtendremos el precio de venta de todas las uvas de la segunda finca. Este producto sería el elemento (Fila 2, Columna 2) de la diagonal principal. Por lo que 4.420 euros es el precio de venta de todas las uvas de la finca 2.

El total del dinero de venta que recibe el agricultor por sendas fincas sería:

$$4.490€ + 4.420€ = 8.910€$$

PROBLEMA 4

Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:

El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

$$Matriz\ de\ vendedores: V = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix}$$

En la matriz V:

- Primera Fila: servicios del vendedor A
- Segunda Fila: servicios del vendedor B
- Tercera Fila: servicios del vendedor C

$$Matriz\ de\ Precios: P = \begin{pmatrix} 75€ \\ 300€ \\ 250€ \end{pmatrix}$$

En la matriz P:

- Fila 1: Precio por hora trabajada
- Fila 2: Precio por demostración
- Fila 3: Precio por viaje

$$Total\ a\ pagar: V \cdot P = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75€ \\ 300€ \\ 250€ \end{pmatrix}$$

En el producto V·P:

- Fila 1: Total a pagar al vendedor A
- Fila 2: Total a pagar al vendedor B
- Fila 3: Total a pagar al vendedor C

$$V \cdot P = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75€ \\ 300€ \\ 250€ \end{pmatrix}$$

$$V \cdot P = \begin{pmatrix} 40 \cdot 75 + 10 \cdot 300 + 5 \cdot 250 \\ 80 \cdot 75 + 15 \cdot 300 + 8 \cdot 250 \\ 100 \cdot 75 + 25 \cdot 300 + 10 \cdot 250 \end{pmatrix}$$

$$V \cdot P = \begin{pmatrix} 7.250€ \\ 12.500€ \\ 17.500€ \end{pmatrix}$$

Dinero por ingresar por cada vendedor, sin aplicar IRPF:

- Vendedor A: 7.250€
- Vendedor B: 12.500€
- Vendedor C: 17.500€

Aplicamos, al total del dinero recibido por cada vendedor, el impuesto IRPF correspondiente. Sabiendo que, si se aplica un 15% de impuestos, el vendedor recibe el 85% del total en bruto. Y si se aplica un 18% de impuestos, el vendedor recibe el 82%,

- Vendedor A tras IRPF: 7.250x0,85= 6.162,5€
- Vendedor B tras IRPF: 12.500x 0,82= 10.250€
- Vendedor C tras IRPF: 17.500x 0,82= 14.350€

$$Total\ a\ pagar: V \cdot P = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 75€ \\ 300€ \\ 250€ \end{pmatrix}$$

En el producto V·P:

- Fila 1: Total a pagar al vendedor A
- Fila 2: Total a pagar al vendedor B
- Fila 3: Total a pagar al vendedor C

PROBLEMA 5

Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:

Un fabricante de paneles fotovoltaicos está analizando la eficiencia de tres modelos de placas (A, B y C). En un día determinado se realizaron tres pruebas. En la primera, utilizando 2 placas del modelo A, 1 placa del modelo B y 3 placas del modelo C, se generó una potencia efectiva total de 2960W. En la segunda, al combinar 1 placa del modelo A, 3 placas del modelo B y 2 placas del modelo C, se obtuvo una potencia efectiva total de 2990W. En la tercera, una configuración con 3 placas del modelo A, 2 placas del modelo B y 1 placa del modelo C produjo una potencia efectiva total de 2870W. ¿Se puede obtener la potencia efectiva que generó individualmente cada modelo de placa fotovoltaica? En caso afirmativo, obtenga dichas potencias efectivas.

$$Matriz\ de\ Pruebas: P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En la matriz P:

- Primera Fila: número de placas de cada tipo en la prueba 1
- Segunda Fila: número de placas de cada tipo en la prueba 2
- Tercera Fila: número de placas de cada tipo en la prueba 3

$$Matriz\ de\ Potencias: W = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

En la matriz W:

- Fila 1: Potencia de una placa del modelo A
- Fila 2: Potencia de una placa del modelo B
- Fila 3: Potencia de una placa del modelo C

$$Potencia\ consumida\ en\ cada\ modelo: P \cdot W = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

En el producto P·W:

- Fila 1: Potencia total en la prueba 1
- Fila 2: Potencia total en la prueba 2
- Fila 3: Potencia total en la prueba 3

El producto P·W lo igualamos a una matriz columna con los valores de las potencias efectivas consumidas en cada prueba

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.960\ watios \\ 2.990\ watios \\ 2.870\ watios \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2A + B + 3C \\ A + 3B + 2C \\ 3A + 2B + C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.960\ watios \\ 2.990\ watios \\ 2.870\ watios \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus componentes son iguales. Por lo que llegamos a un sistema 3x3.

$$2A + B + 3C = 2960$$

$$A + 3B + 2C = 2990$$

$$3A + 2B + C = 2870$$

En el Tema 2, apartado 2, problema 15, ya resolvimos este sistema por el método de sustitución. Obteniendo:

$$A = 450 \text{ W}$$
$$B = 500 \text{ W}$$
$$C = 520 \text{ W}$$

Si no deseamos resolver el ejercicio empleando sistemas de ecuaciones, podemos aplicar matriz inversa. Ya que el determinante de la matriz P es distinto de 0, por lo que el sistema admite solución única.

$$\det(P) = -18 \rightarrow Existe\ P^{-1}$$

Con matrixcalc.org es inmediato obtener la inversa de la matriz P:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/18 & -5/18 & 7/18 \\ -5/18 & 7/18 & 1/18 \\ 7/18 & 1/18 & -5/18 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P \cdot W = \begin{pmatrix} 2.960\ watios \\ 2.990\ watios \\ 2.870\ watios \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot P \cdot W = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2.960 \\ 2.990 \\ 2.870 \end{pmatrix}$$

$$W = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2.960 \\ 2.990 \\ 2.870 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1/18 & -5/18 & 7/18 \\ -5/18 & 7/18 & 1/18 \\ 7/18 & 1/18 & -5/18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.960 \\ 2.990 \\ 2.870 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 450 \\ 520 \\ 500 \end{pmatrix}$$