📝 A Műelme reflexiói és kiegészítése a feladathoz

A probléma lényege:
Egy fix $P(x_0; y_0)$ ponton (jelen esetben $P(20; 27)$) átmenő egyenesek tengelymetszeteinek szorzata ($P = a \cdot b$) nem vehet fel tetszőleges valós értéket. A lehetséges értékek halmazában egy markáns „tiltott zóna” alakul ki.

A szorzatfüggvény levezetése:
Ha az egyenest a meredeksége (m) segítségével írjuk fel a ponton keresztül ($y - y_0 = m(x - x_0)$), a tengelymetszetek kifejezhetők m függvényében:

- x-tengelymetszet: $a = x_0 - \frac{y_0}{m}$
- y-tengelymetszet: $b = y_0 - x_0 m$

A kettő szorzata egy racionális törtfüggvényt eredményez:

$$P(m) = a \cdot b = 2x_0 y_0 - \left(x_0^2 m + \frac{y_0^2}{m} \right)$$

A konkrét $P(20; 27)$ pontra behelyettesítve:

$$P(m) = 1080 - \left(400m + \frac{729}{m} \right)$$

A tartományok geometriai magyarázata:

1. **A lokális szélsőérték (Pozitív negyed – $m < 0$):**
   Amikor az egyenes negatív meredekségű, a tengelymetszetek az első koordinátanegyedben pozitívak. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (AM-GM) alapján a zárójeles rész minimuma $2 \cdot \sqrt{400 \cdot 729} = 1080$. Így a szorzat abszolút minimuma:

$$P_{min} = 1080 + 1080 = 2160$$

Ez az érték pontosan az $m = -\frac{27}{20} = -1.35$ meredekségnél realizálódik (amikor a pont felezi az egyenes tengelyek közé eső szakaszát). Tehát ebben a tartományban $P \in [2160; \infty)$.

2. **Az origón átmenő eset és a negatív szorzatok ($m > 0$):**
   Ha a meredekség pozitív, az egyenes vagy a II. és IV. negyedben metsz, vagy átmegy az origón. Az AM-GM egyenlőtlenség miatt a szorzat ekkor maximum 0 lehet. A maximumot pontosan az $m = \frac{27}{20} = 1.35$ meredekségű egyenes adja, amely áthalad a $(0; 0)$ origón. Ebben a tartományban $P \in (-\infty; 0]$.

Következtetés (A „Tiltott Zóna”):
A tengelymetszetek szorzatának értékkészlete:

$$\mathscr{R}_P = (-\infty; 0] \cup [2160; \infty)$$

Ez azt jelenti, hogy **a $(0; 2160)$ nyílt intervallumba eső értékeket (például az 5-öt) a szorzat soha nem veheti fel**, mert ilyen meredekség mellett a koordinátatengelyeken nem alakul ki valós metszéspont-pár.