ARCOIRIS

<u>TEMA:</u> CIRCUNFERENCIA

<u>FOTOGRAFÍA ELEGIDA PARA TRABAJAR</u>:



Tomada el día 24/08/24 a las 18.22 hs en la localidad de Fray Luis Beltrán – Santa Fé.

INTRODUCCIÓN:

Un arcoíris está formado por una serie de arcos concéntricos de colores que se observan cuando la luz de una fuente lejana (comúnmente el Sol) incide sobre un grupo de gotas de agua, como cuando llueve o justo después de llover, y se observa en dirección opuesta al sol. Como su visualización está ligada a la luz, cada observador lo ve de forma única dependiendo de su localización en relación con la oposición al sol.

Aunque lo vemos como un semicírculo, normalmente está formado por círculos completos. La trayectoria que describe y sus colores, está relacionado con ciertos principios de la física, en particular con la longitud de onda de la luz y el ángulo de refracción de cada rayo.

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA:

(Propuesta para quinto año del nivel secundario)

En la imagen tomada, el arcoíris se asemeja a un semicírculo que cruza de un extremo a otro del horizonte.

Se considera que la base del arcoíris se apoya en el suelo en dos puntos distintos que son los extremos visibles del arco, siendo la distancia entre ambos 80 metros.

Se desea calcular:

a) La altura máxima que alcanza el arcoíris en la imagen desde el nivel del suelo.
b) Las coordenadas del punto en el cual se alcanza esa altura máxima.
c) Traducir las coordenadas formando una ecuación de parábola, verificando si coincide o no, como se relata en la introducción teórica.
d) Hallar la ecuación matemática que modele el arcoíris en el plano cartesiano.

SISTEMATIZACIÓN:

Utilizando como herramienta GeoGebra se ubica el arcoíris en el plano cartesiano, tomando la línea del horizonte sobre el eje de abscisas.

De esta manera, tendremos los puntos de los extremos Ay B, cuyas coordenadas son (-40,0) y (40,0) respectivamente. Así la amplitud máxima del arco es de 80 metros como se había planteado.

A partir de aquí, se tomarán dos caminos diferentes, por un lado, la resolución a través de una parábola y por otro, la modelización con una circunferencia.

MATEMATIZACIÓN:

Parábola:

A partir de los dos puntos dados (por los que pasa la curva), obtenemos gráficamente el punto más alto, que será nuestro vértice.

Datos:

A= (-40,0) B= (40,0)

Vértice: V= (0,40)

Dado que el eje de simetría es el eje y, la ecuación de la parábola que buscamos tendrá como forma general:

$(x – h)^2 = 4a (y – k)$

Conociendo las coordenadas del vértice:

$(x – 0)^2 = 4a (y – 40)$

Reemplazamos en la ecuación las coordenadas de uno de los puntos conocidos (en este caso A) para hallar el valor de **a**.

$(-40 – 0)^2 = 4a (0 – 40)$

$1600 = -160\ a$

$a = \frac{1600}{-160} \implies a = -10$

con este valor de **a** y las coordenadas del vértice, armamos la ecuación de la parábola correspondiente.

$(x – 0)^2 = 4 (-10) (y – 40)$

$\boxed{(x – 0)^2 = -40 (y – 40)}$

Al representar gráficamente la parábola con la ecuación obtenida, observamos que no coincide con la trayectoria del arco descripta en la imagen. Se procede a realizar otro método para su resolución.

<u>Circunferencia</u>:

Teniendo como dato los dos puntos donde apoya el arcoíris sobre la horizontal, sabemos la distancia entre los mismos, que se corresponde con el diámetro de la circunferencia que queremos hallar.

De manera rápida podremos armar la ecuación de circunferencia (centro – radio) que pasa por los puntos dados.

Radio: $\mathbf{r} = \frac{diámetro}{2} = \frac{80\ u.}{2} \Longrightarrow \mathbf{r} = 40$ unidades

Si el centro de circunferencia tiene coordenadas (0,0)

La altura máxima estará situada sobre el eje y (y= **r**)

$H_{máx.} = (0 , r) \Longrightarrow H_{máx.} = (0 , 40)$

La altura máxima alcanzada en la imagen es de 40 metros.

Ecuación centro-radio de circunferencia

Como el centro C= (0,0) la ecuación tendrá la forma general:

$x^2 + y^2 = r^2$

reemplazando el valor del radio, obtenemos:

$x^2 + y^2 = 40^2$

<u>VALIDACIÓN</u>:

A partir del proceso de modelización realizado, fue posible analizar la forma geométrica que describe el arcoíris observando su curvatura y comparándola con distintos modelos matemáticos posibles. En un primer momento, se consideró que dicha trayectoria podría representarse mediante una parábola, sin embargo, al realizar el ajuste con ecuaciones y coordenadas reales, se observó que los puntos correspondientes al arcoíris se ajustan con mayor precisión a la ecuación de una circunferencia.

El modelo circular permitió representar de manera más exacta la simetría y la curvatura constante del fenómeno que corresponde a un **arco de circunferencia** en el que el centro se ubica aproximadamente en la línea que une al observador con el punto antisolar, lo cual tiene sustento físico: el arcoíris es el resultado de la refracción y reflexión de la luz solar en gotas de agua, lo que genera un cono de luz cuya intersección con el plano de visión produce un arco de circunferencia. Cabe aclarar, que la imagen visualizada es subjetiva y personal para cada observador, por lo que los resultados no expresan valores a escala real.

Archivo correspondiente:

https://www.geogebra.org/classic/tc8wgyfr