1. Sea la función definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ en el dominio $(0,+\infty)$.

a) Halla los extremos relativos y absolutos de $f(x)$ (abscisas donde se obtienen y sus ordenadas) en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$.

b) Hallar los puntos de inflexión que existan en todo el dominio de la función (obtener abscisa y ordenada).

a) Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo → $f'(x)=0 \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$

$-1+x=0 \rightarrow x=1$ → punto crítico

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para determinar si el punto crítico es extremo relativo.

$f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x-(-1+x)2}{x^3}=\frac{x+2-2x}{x^3}=\frac{2-x}{x^3} \rightarrow f''(1)=\frac{2-1}{1}=1>0$ → El valor $x=1$ es un mínimo relativo.

Obtenemos la imagen del mínimo relativo y la imagen de los extremos del intervalo.

$x=1 \rightarrow f(1)=1+\ln(1)=1 \rightarrow (1,1)$

$x=\frac{1}{e} \rightarrow f(\frac{1}{e})=e+\ln(\frac{1}{e})=e-1\simeq 1{,}71 \rightarrow (\frac{1}{e},1{,}71)$

$x=e \rightarrow f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1\simeq 1{,}37 \rightarrow (e,1{,}37)$

La imagen más grandes será la del máximo absoluto. La imagen más pequeña será la del mínimo absoluto. Por lo tanto:

$(1,1)$ → es mínimo relativo y mínimo absoluto.

$(\frac{1}{e},1{,}71)$ → es máximo absoluto

b) La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero: $f''(x)=0$. La segunda derivada ya la calculamos en el apartado anterior → $f''(x)=\frac{2-x}{x^3} \rightarrow 2-x=0 \rightarrow x=2$ → candidato a punto de inflexión.

Aplicamos la condición suficiente de la tercera derivada para determinar si tenemos realmente un punto de inflexión.

$f'''(x)=\frac{-(x^3)-(2-x)3x^2}{x^6}=\frac{-x-(2-x)3}{x^4}=\frac{-x-6+3x}{x^4}=\frac{2x-6}{x^4} \rightarrow f'''(2)=\frac{4-6}{16}=\frac{-1}{8}\neq 0$ → el valor $x=2$ es un punto de inflexión.

Obtenemos su imagen → $f(2)=\frac{1}{2}+\ln(2)\simeq 1{,}19 \rightarrow (2,1{,}19)$

2. Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima (ayuda: recuerda la relación que hay entre pendiente y derivada a través de la interpretación geométrica de la derivada).

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas primas ' de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2$ → punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \rightarrow g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2} \rightarrow \left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.

3. Obtener el valor de x de la función $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$ donde la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ sea igual a 2 . Obtener también el valor de la ordenada para x .

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto coincide con el valor de la derivada a la función en ese punto. Es lo que se conoce como interpretación geométrica de la derivada.

$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}$ → igualamos la derivada a $2 \rightarrow f'(x)=2 \rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}=2$

$\frac{1}{2x-2\sqrt{x}}=2 \rightarrow 1=4x-4\sqrt{x} \rightarrow 1-4x=-4\sqrt{x}$ → elevamos al cuadrado → $1+16x^2-8x=16x$

$16x^2-24x+1=0$ → resolvemos → $x=\frac{24\pm\sqrt{576-64}}{32}=\frac{24\pm16\sqrt{2}}{32} \rightarrow x_1=0{,}04 \quad , \quad x_2=1{,}46$

No olvides que, en ecuaciones con raíces donde se eleva al cuadrado, hay que comprobar que las soluciones no hacen negativo al discriminante e la raíz. En este caso, dos valores obtenidos hacen positivo el discriminante de $\sqrt{x}$.

Falta obtener sus imágenes:

$x_1=0{,}04 \rightarrow f(0{,}04)=\ln(\sqrt{0{,}04}-1)=\nexists$ → El valor $x_1=0{,}04$ no pertenece al dominio de la función

$x_2=1{,}46 \rightarrow f(1{,}46)=\ln(\sqrt{1{,}46}-1)=-1{,}57$ → Punto solución: $(1{,}46\,,-1{,}57)$