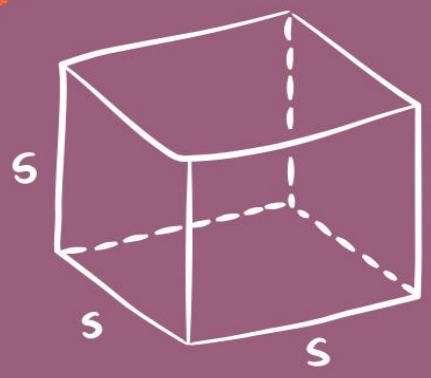
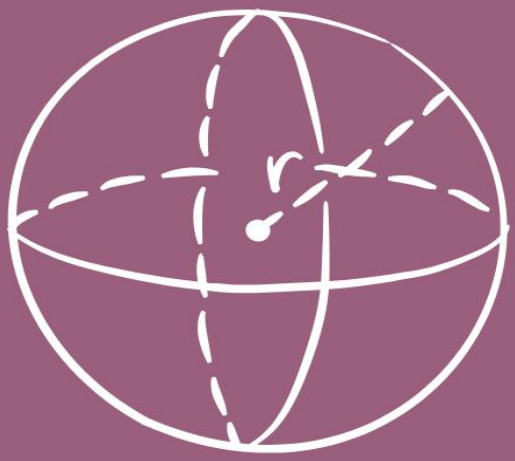
BAHAN AJAR
MATEMATIKA

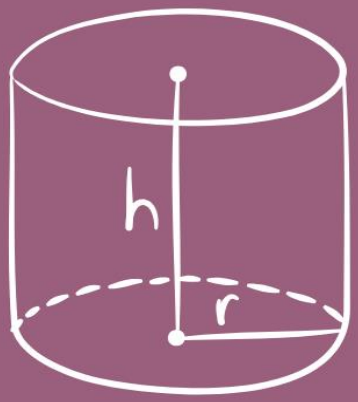
Disusun oleh Amelia Agustin



$V = s^3$



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$



$V = \pi r^2 h$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga Bahan Ajar Matematika dengan topik **"Barisan dan Deret"** ini dapat diselesaikan dengan baik. Bahan Ajar ini disusun sebagai salah satu sumber belajar yang sistematis, komperhensif, dan mudah dipahami oleh siswa dalam mendalami konsep-konsep dasar matematika.

Bahan ajar ini dirancang secara khusus untuk membantu peserta didik dalam memahami konsep pola bilangan, barisan dan deret bilangan, barisan dan deret aritmatika, barisan dan deret geometri, hingga deret geometri tak hingga. Pembahasan dalam bahan ajar ini dilengkapi dengan contoh-contoh kontekstual dalam kehidupan sehari-hari serta penjelasannya secara rinci, rumus-rumus praktis, contoh soal bergradasi, guna melatih pemahaman serta keterampilan memecahkan masalah matematika.

Penulis menyadari bahwa penyusunan bahan ajar ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan dan penyempurnaan bahan ajar ini di masa mendatang.

Akhir kata, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan, masakan, dan bimbingan selama proses penyusunan bahan ajar ini. Semoga bahan ajar ini dapat memberikan manfaat yang nyata bagi kemajuan dunia Pendidikan, khususnya dalam pembelajaran matematika.

Semarang, Agustus 202

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR ii
DAFTAR ISI iii
A. POLA BILANGAN, BARISAN BILANGAN DAN DERET BILANGAN 1
1. POLA BILANGAN 1
2. BARISAN BILANGAN 1
3. DERET BILANGAN 3
B. BARISAN ARITMATIKA 4
C. DERET ARITMATIKA 8
D. BARISAN GEOMETRI 12
E. DERET GEOMETRI 16
F. DERET GEOMETRI TAK HINGGA 20
DAFTAR PUSTAKA 22

A. POLA BILANGAN, BARISAN BILANGAN DAN DERET BILANGAN

1. POLA BILANGAN

Pola bilangan adalah deretan angka yang mempunyai aturan tersendiri dalam penyusunannya sehingga membentuk suatu pola.

Contoh:

1, 3, 5, 7, ….

Urutan ke-	Besar Bilangan	Pola
1	1	2*1-1
2	3	2*1-1
3	5	2*1-1
. . .	. . .	. . .
10	….	2*1-1
. . .	. . .	. . .
N	….	…..

Jadi pola untuk bilangan yang ke -n pada contoh di atas adalah (2*n-1) atau (2n-1) atau $Un = 2n - 1$

2. BARISAN BILANGAN

Barisan adalah himpunan sembarang unsur-unsur yang ditulis secara berurutan. Barisan Bilangan adalah bilangan yang disusun menurut suatu aturan tertentu. Unsur-unsur atau suku-suku barisan adalah nilai-nilai suatu fungsi yang memiliki domain himpunan bilangan asli.

Untuk memahami pengertian suatu barisan bilangan, perhatikan contoh urutan bilangan berikut ini:

a) 2, 4, 6, 8, 10, ……
b) 3, 6, 9, 12, 15, ……
c) 1, 3, 5, 7, 9, ……
d) 1, 4, 9, 16, 25, ……
e) 3, 2, 5, 4, 7, 8, ……
f) 12, 15, 13, 18, 25, ……

Urutan bilangan-bilangan pada contoh a, b, c, dan d di atas mempunyai aturan tertentu, Misalnya pada contoh a) dengan urutan bilangan 2, 4, 6, 8, 10, … mempunyai aturan tertentunya adalah **ditambahkan dengan 2.** Sedangkan pada contoh b) dengan urutan bilangan 3, 6, 9, 12, 15, … mempunyai aturan

tertentunya adalah **ditambah dengan 3.** ***Urutan bilangan yang memiliki aturan tertentu disebut barisan bilangan.*** Sedangkan urutan bilangan-bilangan pada contoh e) dan f) di atas **tidak mempunyai aturan tertentu,** sehingga **bukan** merupakan suatu **barisan bilangan.**

Bentuk umum barisan bilangan dapat dinyatakan dengan:

$$U_1\ ,\ U_2.\ U_3,\ \ldots\ldots,\ U_{n-1},\ U_n$$

Keterangan:

U_1 : $suku\ ke-1$

U_2 : $suku\ ke-2$

U_3 : $suku\ ke-3$

.

.

.

U_{n-1} : $suku\ ke-(n-1)$

U_n : $suku\ ke-n$ (suku umum barisan bilangan)

Contoh:

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan

a) 1, 4, 9, 16, …

b) 4, 6, 8, 10, …

c) 1, 9, 25, 49, …

Alternatif penyelesaian:

a) 1, 4, 9, 16, …

$U_1 = 1 = (1 \times 1)$

$U_2 = 4 = (2 \times 2)$

$U_3 = 9 = (3 \times 3)$

$U_4 = 16 = (4 \times 4)$

…

$U_n = (n \times n)$

$U_n = n^2$

b) 4, 6, 8, 10, …

$U_1 = 4 = 2 + 2 = (2 \times 1) + 2$

$U_2 = 6 = 4 + 2 = (2 \times 2) + 2$

$U_3 = 8 = 6 + 2 = (2 \times 3) + 2$

$U_4 = 10 = 8 + 2 = (2 \times 4) + 2$

…

$U_n = (2 \times n) + 2$

$U_n = 2n + 2$

c) 1, 9, 25, 49, …

$U_1 = 1 = \left((2 \times 1) - 1\right)^2$

$U_2 = 9 = \left((2 \times 2) - 1\right)^2$

$U_3 = 25 = \left((2 \times 3) - 1\right)^2$

$U_4 = 49 = \left((2 \times 4) - 1\right)^2$

…

$U_n = \left((2 \times n) - 1\right)^2$

$U_n = (2n - 1)^2$

3. DERET BILANGAN

Deret suatu barisan bilangan dan jumlah n suku pertamanya

Jika suku-sulu suatu barisan dijumlahkan maka penjumlahan berurut dari suku-suku barisan itu disebut **Deret.**

Secara Umum : $\boldsymbol{U_1}$, $\boldsymbol{U_2}$, $\boldsymbol{U_3}$, … , $\boldsymbol{U_n}$ adalah suku-suku dari suatu barisan, maka $\boldsymbol{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n}$ adalah deret yang bersesuaian dengan barisan itu.

Jumlah n suku pertama dari suatu barisan dilambangkan dengan $\boldsymbol{S_n, atau}$

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots + U_n$$

Misal :

- Barisan : 1, 2, 3, 4, 5, …….
  Deret : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots..$
- Barisan : 1, 4, 9, 16, 25, …….
  Deret : $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots\ldots$

Contoh :

Diketahui suatu deret : $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots$

Tentukan :

a) Jumlah tiga suku yang pertama
b) Jumlah enam suku pertama

Alternatif penyelesaian:

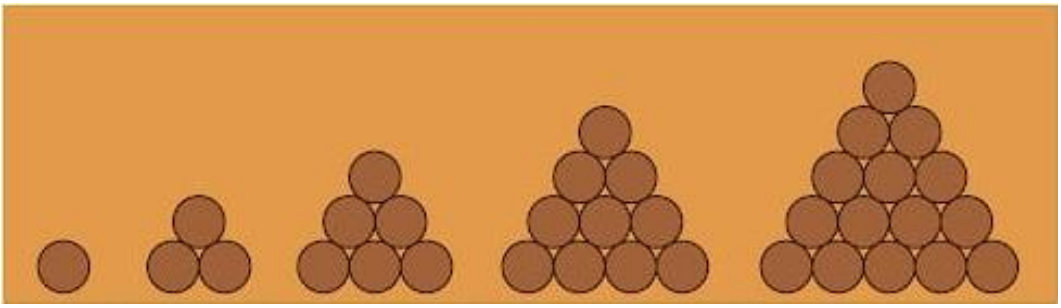
a) $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
b) $S_3 = 1 + 3 + 5 + 9 + 11 = 36$

B. BARISAN ARITMATIKA

Perhatikan gambar tumpukan jeruk di bawah ini!



Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak buah dalam satu tumpukan?
Jika diperhatikan gambar di atas, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida. Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti gambar di bawah ini.



Perhatikan beberapa barisan bilangan berikut ini

a) 1, 3, 5, 7, ……
b) 6, 10, 14, 18, ……
c) 11, 8, 5, 2, ……
d) 20, 15, 10, 5, ……

Pada setiap barisan di atas, tampak bahwa selisih dua suku berurutan **selalu tetap**. Barisan bilangam yang mempunyai ciri seperti itu disebut **Barisan Aritmatika**,

dan selisih dua suku berurutan itu disebut **beda** yang biasa dilambangkan dengan huruf **b.**

Misal :

a) 1, 3, 5, 7, ……, $b = 3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 2$
b) 6, 10, 14, 18, ….., $b = 10 - 6 = 14 - 10 = 18 - 14 = 4$
c) 11, 8, 5, 2, …….., $b = 8 - 11 = 5 - 8 = 2 - 5 = -3$
d) 20, 15, 10, 5, ….., $b = 15 - 20 = 10 - 15 = 5 - 10 = -5$

Suku pertama dari barisan aritmatika biasanya dilambangkan dengan huruf **a.**
Secara umum barisan aritmatika didefinisikan sebagai berikut:
$\boldsymbol{U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots\ldots U_n}$ disebut barisan aritmatika untuk n bilangan asli dan $n > 1$ dan berlaku $\boldsymbol{b = U_n - U_{n-1}}$ dengan
$\boldsymbol{U_1}$: *Suku pertama*
$\boldsymbol{U_2}$: *Suku kedua*
$\boldsymbol{U_3}$: *Suku ketiga*
.
.
$\boldsymbol{U_n}$: *Suku ke* $-$ *n*

a. Suku ke-n

Jika terdapat barisan aritmatika $\boldsymbol{U_1, U_2, U_3, \ldots, U_{n-1}, U_n}$ maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

$\boldsymbol{U_1} = a$
$\boldsymbol{U_2} = \boldsymbol{U_1} + b \qquad\qquad = a + b$
$\boldsymbol{U_3} = \boldsymbol{U_2} + b \qquad = a + b + b \quad = a + 2b$
$\boldsymbol{U_4} = \boldsymbol{U_3} + b \qquad = a + 2b + b = a + 3b$
.
.
$\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{U_{n-1}} + b = a + (n-2)b + b = a + (n-1)b$

Dengan demikian rumus suku ke-n dari suatu barisan aritmatika adalah:

$$U_n = a + (n-1)b$$

Keterangan:
U_n : *suku ke* $-$ *n*
n : *banyak suku*, $n \in$ *bilangan asli*
a : *suku pertama*
b : *beda atau selisih*

Contoh :

1. Diketahui barisan aritmatika 3, 8, 13, ……
   a) Tentukan suku ke-10!
   b) Tentukan rumus suku ke-n barisan tersebut!
   c) Suku ke berapakah yang nilainya 198?

Alternatif penyelesaian:

a) Dari barisan aritmatika 3, 8, 13, ……
   Suku pertama (a)=3
   Beda (b)=8-3=5
   $U_n = a + (n-1)b$
   $U_{10} = 3 + (10-1)5$
   $U_{10} = 3 + 9(5)$
   $U_{10} = 3 + 45$
   $U_{10} = 48$
   Jadi, suku ke-10 adalah 48.

b) $U_n = a + (n-1)b$
   $U_n = 3 + (n-1)5$
   $= 3 + 5n - 5$
   $= 5n - 2$
   Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $5n - 2$.

c) Misalkan $U_n = 198$
   $U_n = 198$
   $5n - 2 = 198$
   $5n = 198 + 2$
   $5n = 200$
   $n = 40$
   Jadi, 198 adalah suku ke-40

2. Diberikan barisan aritmatika dengan suku ke tiga sama dengan 7 dan suku kesebelas sama dengan 23. Tentukan suku ke-n.

a) Menentukan beda/selisih

$$\begin{array}{rl} U_3 = a + 2b & = 7 \\ U_{11} = a + 10b & = 23 \\ \hline -8b & = -16 \quad + \\ b & = \frac{-16}{8} \\ b & = 2 \end{array}$$

b) Menentukan suku pertama (a)
   $a + 2b = 7$
   $a + 2(2) = 7$

$a + 4 = 7$

$a = 7 - 4$

$a = 3$

c) Menentukan suku ke-n

$U_n = a + (n-1)b$

$U_n = 3 + (n-1)2$

$U_n = 3 + 2n - 2$

$U_n = 2n + 1$

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan tersebut adalah $U_n = 2n + 1$

3. Sebuah pabrik pakaian menghasilkan 1.200 potong baju pada bulan pertama operasinya. Karena permintaan pasar bertambah pesat, pimpinan pabrik memutuskan untuk meningkatkan kapasitas produksi secara konstan sebanyak 150 potong baju setiap bulannya. Berapakah jumlah pakaian yang diproduksi pabrik tersebut pada bulan ke-12?

Penyelesaian:

- $suku\ pertama\ (a) = 1.200$
- $beda\ (b) = 150$
- $waktu\ (n) = 12\ bulan$

$U_n = a + (n-1)b$

$U_{12} = 1.200 + (12-1)150$

$U_{12} = 1.200 + 11(150)$

$U_{12} = 1.200 + 1.650$

$U_{12} = 2.850$

b. Suku tengah

Apabila banyaknya suku suatu barisan aritmatika ganjil, maka terdapat sebuah suku tengah yang disebut U_t.

$a, \dots, U_t, \dots, U_n$ untuk n ganjil maka:

$$2U_t = a + U_n \quad \text{atau} \quad U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

Keterangan :

$U_n : suku\ ke - n$ $U_t : suku\ tengah$

$a : suku\ pertama$

Misalkan $1, 5, 9, 13, 17 \longrightarrow n = 5$ dan suku tengah $U_t$maka:

$$U_t = \frac{1}{2}(a + U_n)$$

$$U_t = \frac{1}{2}(1 + 17)$$

$$U_t = \frac{1}{2}(18)$$

$U_t = 9$

c. Sisipan

Jika diantara dua suku yang berurutan dalam suatu barisan aritmatika dimasukkan satu atau lebih suku yang lain sehingga menjadi barisan aritmatika baru, maka proses ini disebut menyisipkan atau interpolasi. Misalkan diantara dua suku U_t dan U_2 disisipkan k bilangan, sehingga terjadi barisan aritmatika baru. Apabila beda barisan aritmatika baru dimisalkan b' maka akan terbentuk:

$$U_1, (U_1 + b'), (U_1 + 2b'), (U_1 + 3b'), \ldots\ldots, (U_1 + k\,b'),\ \ U_2$$

Dimana:

$(U_1 + kb') + b' = U_2$

$U_1 + b'(k + 1) = U_2$

$b' = \dfrac{U_2 - U_1}{k + 1}\ \ atau\ \ b' = \dfrac{b}{k + 1}$

Sedangkan banyaknya suku yang baru setelah disisipi dicari dengan menggunakan persamaan sebagai berikut.

$$n' = n + (n - 1)k$$

Keterangan :

b' : *beda baru* $\qquad$ n : *banyak suku barisan lama*

b : *beda semula* $\qquad$ n' : *banyak suku barisan baru*

k : *banyak bilangan yang disisipkan*

Contoh:

Diketahui barisan aritmatika 1, 7, 13, 19. Jika diantara dua suku berurutan disisipkan dua bilangan sehingga terjadi barisan aritmatika baru, tentukan barisan aritmatika baru itu!

Penyelesaian:

Barisan aritmatika 1, 7. 13, 19

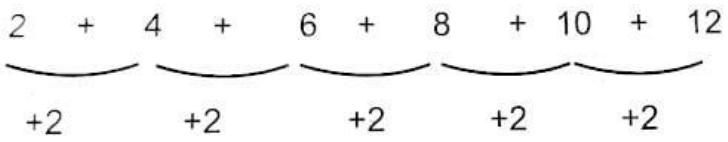
$n = 4, \qquad b = 7 - 1 = 13 - 7 = 19 - 13 = 6, \qquad k = 2, maka$:

$b' = \dfrac{b}{k + 1} = \dfrac{6}{2 + 1} = \dfrac{6}{3} = 2$

Sehingga barisan aritmatika yang baru adalah 1, 3,5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

C. DERET ARITMATIKA

Jika setiap suku-suku pada barisan aritmatika saling dijumlahkan maka akan terbentuk **Deret Aritmatika.** Perhatikan deret berikut!



Deret tersebut merupakan deret aritmatika karena beda tiap suku yang berurutan selalu sama yaitu +2.

Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama deret aritmatika maka $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_n$ dapat diturunkan dengan cara sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \cdots + a \\ S_n = a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + U_n \\ \hline 2S_n = (a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n) + \cdots + (a+U_n) \end{array} \; + \; sebanyak\ n\ kali$$

$$2S_n = n.(a + U_n)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n)$$

Dengan demikian rumus jumlah n suku pertama dari deret aritmatika dengan suku pertama a dan beda b adalah:

$$S_n = \frac{1}{2}n(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

Keterangan:

$S_n : jumlah\ suku\ ke - n$

$U_n : suku\ ke - n$ $\qquad b : beda$

$a : suku\ pertama$ $\qquad n : banyaknya\ suku$

Contoh:

1. Tentukan jumlah 100 suku pertama deret $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$

   Jawab:

   $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$

   Diketahui:

   $a = 1, \qquad b = 3 - 1 = 2, \qquad dan\ n = 100.$

   $$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

   $$S_{100} = \frac{1}{2}.100(2.1 + (100-1).2)$$

   $$S_{100} = 50(2 + 99 \times 2)$$

   $$S_{100} = 50(200)$$

   $$S_{100} = 10.000$$

2. Hitunglah jumlah deret aritmatika $3 + 6\frac{1}{2} + 10 + \cdots$ hingga:

a. 21 *suku pertama,* b. n *suku pertama.*

Jawab:

$3 + 6\frac{1}{2} + 10 + \cdots$

Diketahui:

$a = 3, \qquad b = 6\frac{1}{2} - 3 = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

a. $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$

$$S_{21} = \frac{1}{2}21\left(2(3) + (21-1)\left(\frac{7}{2}\right)\right)$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}\left(6 + 20\left(\frac{7}{2}\right)\right)$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(6 + 70)$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(76)$$

$$S_{21} = 798$$

b. $S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$

$$= \frac{1}{2}n\left(2(3) + (n-1)\left(\frac{7}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}n\left(6 + \frac{7}{2}n - \frac{7}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}n\left(\frac{5}{2} + \frac{7}{2}n\right)$$

$$S_n = \frac{7}{4}n^2 + \frac{5}{4}n$$

3. Hasil produksi pakaian olahraga yang dibuat oleh Erspo pada bulan pertama menghasilkan 120 setel. Setiap bulan berikutnya, hasil produksi meningkat sebanyak 20 setel. Banyak hasil produksi selama 8 bulan pertama adalah …

Penyelesaian:

Diketahui:

$a = 120$

$b = 20$

$n = 8$

Jawab:

$$S_n = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)b)$$

$$S_8 = \frac{1}{2}8(2(120) + (8-1)20)$$

$S_8 = 4\big(240 + 7(20)\big)$
$S_8 = 4(240 + 140)$
$S_8 = 4 \times 380$
$S_8 = 1.520$
Jadi, banyak hasil produksi selama 8 bulan pertama adalah 1.520

4. Hitunglah jumlah dari deret $3 + 8 + 13 + \cdots + 93$

Penyelesaian:

Deret aritmatika $3 + 8 + 13 + \cdots + 93$
$a = 3, \quad b = 8 - 3 = 5, \quad U_n = 93$
Kita tentukan nilai n terlebih dahulu
$U_n = a + (n-1)b$
$93 = 3 + (n-1)5$
$93 = 3 + 5n - 5$
$93 = 5n - 2$
$5n = 95$
$n = 19$ maka:
$S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$
$S_{19} = \frac{1}{2} 19(3 + 93)$
$S_{19} = \frac{1}{2} 19(96)$
$S_{19} = 19 \times 48$
$S_{19} = 912$

Suku ke-n dari suatu deret aritmatika (U_n) dan jumlah n suku pertama dari suatu deret aritmatika (S_n) mempunyai hubungan. Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Contoh:

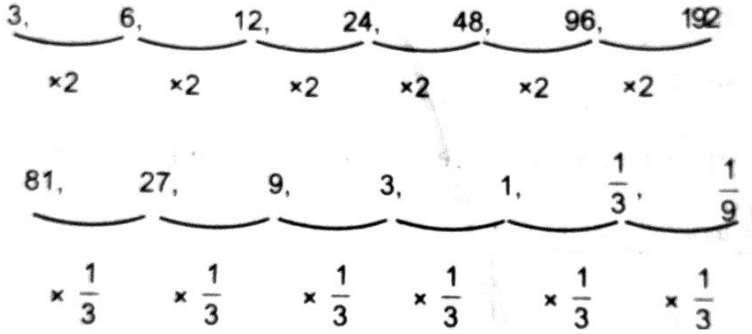
Tentukan suku kedua belas, jika diketahui jumlah suku ke-n suatu deret aritmatika adalah $S_n = 3n - 4n^2$.

Jawab:

$S_n = 3n - 4n^2$
$U_n = S_n - S_{n-1}$
$U_{12} = (3 \times 12 - 4 \times 12^2) - (3 \times 11 - 4 \times 11^2)$
$U_{12} = (36 - 576) - (33 - 484)$
$U_{12} = -540 - (-451)$
$U_{12} = -89$

D. BARISAN GEOMETRI

Barisan geometri merupakan sebuah barisan bilangan yang memiliki pola rasio yang tetap. Bilangan pertama disebut suku pertama $(a = U_1)$, bilangan kedua disebut suku kedua (U_2), bilangan ketiga disebut suku ketiga (U_3) dan seterusnya.



Pada barisan pertama antara dua suku yang berurutan memiliki rasio 2, sedangkan pada barisan kedua antara dua suku yang berurutan memiliki rasio $\frac{1}{3}$. Pada barisan pertama, guna memperoleh suku berikutnya maka suku sebelumnya harus dikalikan dengan rasio (bilangan 2). Rasio berupa bilangan bulat menunjukkan bahwa barisan geometri tersebut cenderung naik. Sedangkan pada barisan kedua, guna memperoleh suku berikutnya maka suku sebelumnya harus dikalikan dengan rasio $(bilangan\ \frac{1}{3})$. Rasio pecahan menunjukkan bahwa barisan geometri tersebut cenderung turun. Contoh-contoh barisan geometri lainnya adalah:

a) 2, 6, 18, 54, ….
b) 5, -10, 20, -40, ….

Secara umum dapat dikatakan bahwa barisan: $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$ merupakan barisan geometri jika:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \cdots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = konstanta$$

Konstanta tersebut dinamakan rasio (r). Rasio pada contoh barisan tersebut:

a) $rasio = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = \cdots = 3$
b) `$rasio = \frac{-10}{5} = \frac{20}{-10} = \frac{-40}{20} = \cdots = -2$

Setelah memahami konsep dasar dan cara menentukan rasio dari suatu barisan geometri, berikutnya kita akan mempelajari rumus-rumus pokok pada barisan geometri.

a. Suku ke-n

Jika terdapat barisan geometri $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_{n-1}, U_n$ maka diperoleh hubungan sebagai berikut.

$U_1 = a$
$U_2 = ar$
$U_3 = ar^2$
$U_n = U_{n-1}r = ar^{n-1}$
Dengan demikian rumus suku ke-n dari suatu barisan geometri adalah:

$$U_n = ar^{n-1}$$

Keterangan:
$U_n : suku\ ke - n$ $r : rasio$
$a : suku\ pertama$ $n : banyaknya\ suku$

Contoh:

1. Diketahui barisan bilangan 8, 4, 2, 1, …
   a) Rumus suku ke-n
   b) Suku ke-8

   Penyelesaian:

   Rasio dua suku yang berurutan pada barisan bilangan 8, 4, 2, 1, … adalah tetap yaitu $r = \frac{1}{2}$ sehingga barisan bilangan tersebut merupakan barisan geometri.

   a) Rumus suku ke-n barisan tersebut adalah:
      $U_n = ar^{n-1}$
      $U_n = 8.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
      $U_n = 2^3.(2^{-1})^{n-1}$
      $U_n = 2^3.2^{-n}.2^1$
      $U_n = 2^{4-n}$
      Jadi, rumus suku ke-n barisan geometri tersebut adalah $U_n = 2^{4-n}$
   b) Suku ke-8 barisan geometri tersebut adalah
      $U_n = 2^{4-n}$
      $U_8 = 2^{4-8}$
      $U_8 = 2^{-4}$
      $U_8 = \frac{1}{16}$
      Jadi, suku ke-8 barisan geometri tersebut adalah $\frac{1}{16}$
2. Diketahui barisan bilangan $2, 6, 8, 18, 54, ...$ tentukan suku ke 7 dari barisan tersebut!

   Penyelesaian:

$U_1 = a = 2$

$rasio(r) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{6}{2} = 3$ sehingga, suku ke 7-nya

$U_n = ar^{n-1}$

$U_7 = 2(3)^{7-1}$

$U_7 = 2 \times 3^6$

$U_7 = 2 \times 729$

$U_7 = 1.458$

Jadi, nilai dari suku ke-7 (U_7) adalah 1.458

3. Pertambahan penduduk setiap tahun suatu desa mengikuti aturan barisan geometri. Pertambahan penduduk pada tahun 2012 sebesar 24 orang dan pada tahun 2014 sebesar 96 orang. Pertambahan penduduk pada tahun 2019 adalah …..

   Penyelesaian:

   $U_1 = a = 24$

   $U_3 = 96$

   $ar^{3-1} = 96$

   $24r^2 = 96$

   $r^2 = \frac{96}{24}$

   $r^2 = 4$

   $r = 2$

   Pertambahan penduduk pada tahun 2019 adalah

   $U_n = ar^{n-1}$

   $U_8 = 24(2)^{8-1}$

   $U_8 = 24(2)^7$

   $U_8 = 24 \times 128$

   $U_8 = 3.072$

   Jadi, pertambahan penduduk pada tahun 2019 adalah 3.027 orang.

b. Suku tengah

Suku tengah barisan geometri adalah suku yang berada di tengah-tengah suatu barisan dengan syarat banyak suku (n) harus ganjil. Rumus utamanya melibatkan suku pertama (a), suku terakhir (U_n), dan akar kuadrat. Rumus suku tengah U_t ditentukan oleh hubungan:

$$U_t = \sqrt{a \times U_n}$$

Keterangan:

$U_t : suku\ tengah$ $\qquad$ $U_n : suku\ ke - n$

a : $suku\ pertama$

Contoh:

Diketahui barisan geometri $3, 6, 12, \ldots, 3.072$. banyak suku barisan geometri ini ganjil. Tentukan:

a) Suku tengah barisan geometri tersebut
b) Suku ke berapa suku tengah tersebut

Penyelesaian:

a) $U_t = \sqrt{a \times U_n}$

$U_t = \sqrt{3 \times 3.072}$

$U_t = \sqrt{9.216}$

$U_t = 96$

Jadi, suku tengah barisan geometri tersebut adalah 96.

b) $Suku\ tengah = 96$

$U_t = ar^{t-1}$

$96 = 3 \times (2)^{t-1}$

$\frac{96}{3} = (2)^{t-1}$

$32 = (2)^{t-1}$

$2^5 = (2)^{t-1}$

$t - 1 = 5$

$t = 6$

Jadi, suku tengah tersebut merupakan suku ke-6

c. Sisipan

Apabila di antara dua suku U_1dan U_2 suatu barisan geometri disisipkan k bilangan maka terbentuk barisan geometri baru. Misalkan rasio barisan geometri yang baru terbentuk r', maka:

$$r' = \sqrt[(k+1)]{r}$$

Sedangkan banyaknya suku yang baru setelah disisipkan dicari dengan menggunakan persamaan berikut.

$$n' = n + (n-1)k$$

Keterangan:

r' : $rasio\ baru$ $\quad\quad$ n : $banyak\ suku\ barisan\ lama$

r : $rasio\ semula$ $\quad\quad$ n' : $banyak\ suku\ barisan\ baru$

k : $banyak\ bilangan\ yang\ disisipkan$

Contoh:

Tentukan rasio dari barisan bilangan geometri jika di antara bilangan bilangan $\frac{1}{4}$ dan 8 disisipkan sebanyak 4 bilangan!

Penyelesaian:

Kita mencari rasio bilangan semula sebelum disisipkan

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

Jumlah bilangan yang disisipkan $k = 4$, maka rasio yang baru adalah sebagai berikut.

$r' = \sqrt[k+1]{r}$

$r' = \sqrt[4+1]{32}$

$r' = \sqrt[5]{32}$

$r' = 2$

Jadi, rasio dari barisan geometri yang terbentuk adalah 2.

E. DERET GEOMETRI

Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n$ merupakan suku-suku dari suatu barisan geometri, maka $U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$ disebut **deret geometri,** dengan $U_n = ar^{n-1}$.

Jika S_n merupakan jumlah *n* suku pertama dari deret geometri, rumus untuk S_n dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut.

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{n-1} + U_n$

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$

Kalikan S_n dengan *r*.

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$

Kurangkan rS_n terhadap S_n.

$$\begin{array}{l} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n = a - ar^n \end{array} \; -$$

$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Jadi, rumus umum jumlah *n* suku pertama deret geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *r* adalah:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, untuk\ r < 1$$

Atau

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, untuk\ r > 1$$

Keterangan:

$n : banyak\ suku, n \in bilangan\ asli$

$a : suku\ pertama$

$r : rasio\ atau\ perbandingan$

$S_n : jumlah\ n\ suku\ pertama\ deret\ geometri$

Contoh :

1. Hitunglah jumlah 6 suku pertama deret geometri $-2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots$

   Penyelesaian:

   $a = -2, \quad r = -\frac{1}{2}, \quad n = 6$

   $karena\ r = -\frac{1}{2} < 1, gunakan\ rumus\ S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

   $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

   $$S_6 = \frac{-2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

   $$S_6 = \frac{-2\left(1-\frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}}$$

   $$S_6 = \frac{-4\left(\frac{63}{64}\right)}{3}$$

   $$S_6 = -4\left(\frac{63}{64}\right) \times \frac{1}{3}$$

   $$S_6 = -\frac{21}{16}$$

2. Tentukan jumlah deret geometri $5 + 1 + \frac{1}{5} + \cdots$ hingga suku kelima

   Penyelesaian:

$a = 5, \quad r = \frac{1}{5}, \quad n = 5$

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$S_5 = \frac{5\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{5}}$

$S_5 = \frac{5\left(1-\left(\frac{1}{3.125}\right)\right)}{\frac{4}{5}}$

$S_5 = \frac{25}{4}\left(\frac{3.124}{3.125}\right)$

$S_5 = \frac{781}{125}$

$S_5 = 6{,}248$

3. Tentukan jumlah deret geometri $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \cdots + 12.$

Penyelesaian:

$a = \frac{3}{8}, \quad r = 2, \quad U_n = 12$

$U_n = 12$

$ar^{n-1} = 12$

$\frac{3}{8}(2)^{n-1} = 12$

$2^{n-1} = 12 \times \frac{8}{3}$

$2^{n-1} = 32$

$2^{n-1} = 2^5$

$n - 1 = 5$

$n = 6$

Jadi, banyaknya suku adalah 6

$karena\ r = 2 > 1, gunakan\ rumus\ S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$S_6 = \frac{\frac{3}{8}(2^6-1)}{2-1}$

$S_6 = \frac{3}{8}(64 - 1)$

$S_6 = \frac{3}{8}(63)$

$S_6 = \frac{189}{8}$

$S_6 = 23{,}625$

4. Hasil produksi kerajinan seorang pengusaha setiap bulannya meningkat mengikuti aturan barisan geometri. Produksi pada bulan pertamanya sebanyak 150 kerajinan dan pada bulan keempat sebanyak 4.050 kerajinan. Hasil produksi selama 5 bulan adalah ….

   Diketahui:

   $U_1 = a = 150$

   $U_4 = 4.050$

   Ditanya:

   $S_n = \cdots$

   Jawab:

   Menentukan rasio:

   $\frac{U_4}{U_1} = \frac{4.050}{150}$

   $\frac{ar^3}{a} = 27$

   $r^3 = 27$

   $r = \sqrt[3]{27}$

   $r = 3$

   Dengan demikian,

   $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

   $S_5 = \frac{150(3^5 - 1)}{3 - 1}$

   $S_5 = \frac{150(243 - 1)}{2}$

   $S_5 = \frac{150 \times 242}{2}$

   $S_5 = \frac{36.300}{2}$

   $S_5 = 18.150$

   Jadi, hasil produksi selama 5 bulan adalah 18.150

F. DERET GEOMETRI TAK HINGGA

Sebuah kertas berbentuk segi empat dibagi menjadi dua dan salah satu bagiannya dibagi lagi menjadi dua bagian. Bagian ini dibagi lagi menjadi dua dan begitu seterusnya. Secara teoritis pembagian ini dapat dilakukan berulang kali sampai tak hingga kali. Pada pembagian pertama diperoleh setengah bagian, yang kedua seperempat bagian, yang ketiga seperdelapan bagian dan seterusnya sampai tak hingga kali. Peristiwa in merupakan contoh dari deret geometri tak hingga yaitu deret yang banyak suku-sukunya tak hingga. Bentuk deret geometri tak terhingga adalah $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$

Deret geometri tak terhingga diselesaikan dengan matode limit. Diperoleh bahwa hanya **deret geometri tak terhingga konvergen** yang dapat dicari jumlah suku-sukunya, yaitu dengan persamaan sebagai berikut.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \; dimana - 1 < r < 1, r \neq 0$$

Keterangan:

a : $suku\ pertama$

r : $rasio\ atau\ perbandingan$

S_n : $jumlah\ n\ suku\ pertama\ deret\ geometri$

Contoh:

1. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $36 - 12 + \frac{4}{3} + \cdots$

   Penyelesaian:

   $a = 36, \quad r = -\frac{1}{3}$

   $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

   $S_\infty = \frac{36}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

   $S_\infty = \frac{36}{\frac{4}{3}}$

   $S_\infty = 27$

2. Hitunglah jumlah deret geometri tak hingga berikut.

   $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$

   Penyelesaian:

   $a = \frac{5}{2}, \quad r = \frac{1}{3}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_\infty = \frac{15}{4}$$

DAFTAR PUSTAKA

Khakim, M., Izzudin, M., & Syepuri. (2025). *Modul Ajar Materi Esensial Matematika.*

Noormandiri, B. (2022). *Matematika untuk SMA/MA Kelas X*. Penerbit Erlangga.

Sadikin. (2015, Januari). *Bahan ajar barisan dan deret*. Retrieved from WordPress: https://sadikinpmat13.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/01/bahan-ajar-barisan-deret.pdf

Winarno, Toha, M., & Kurniasih, U. (2023). *Buku Pembelajaran Interaktif Matematika untuk SMA/MA.* Brebes.