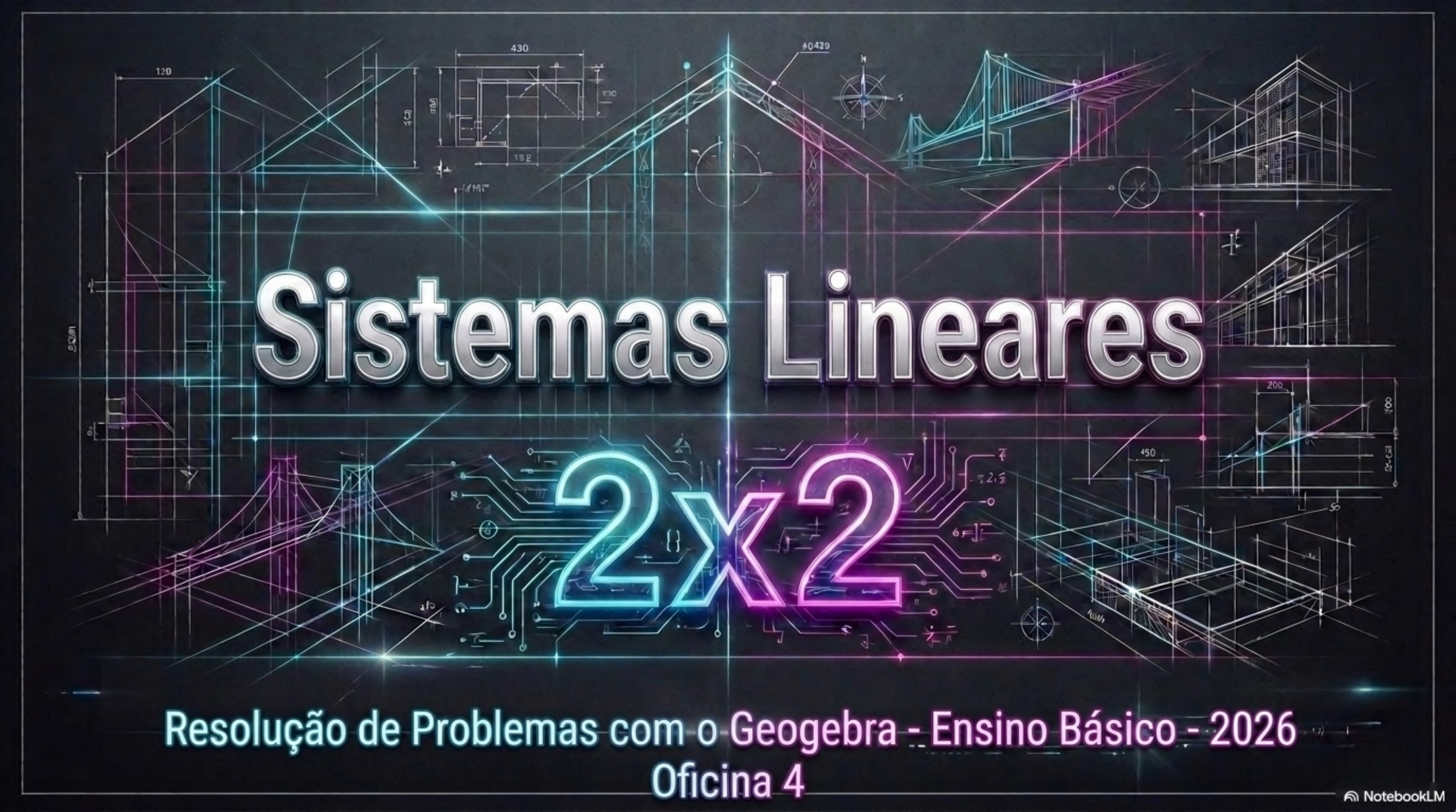

Sistemas Lineares
2x2
Resolução de Problemas com o Geogebra - Ensino Básico - 2026
Oficina 4
NotebookLM

O Sistema Fundamental (A Fundação)

Um sistema linear 2x2 representa um conjunto de duas equações lineares com duas incógnitas em sua forma canônica.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

- x, y : Incógnitas (As variáveis que buscamos)
- a_{11}, a_{21} : Coeficientes de x
- a_{12}, a_{22} : Coeficientes de y
- b_1, b_2 : Termos Independentes

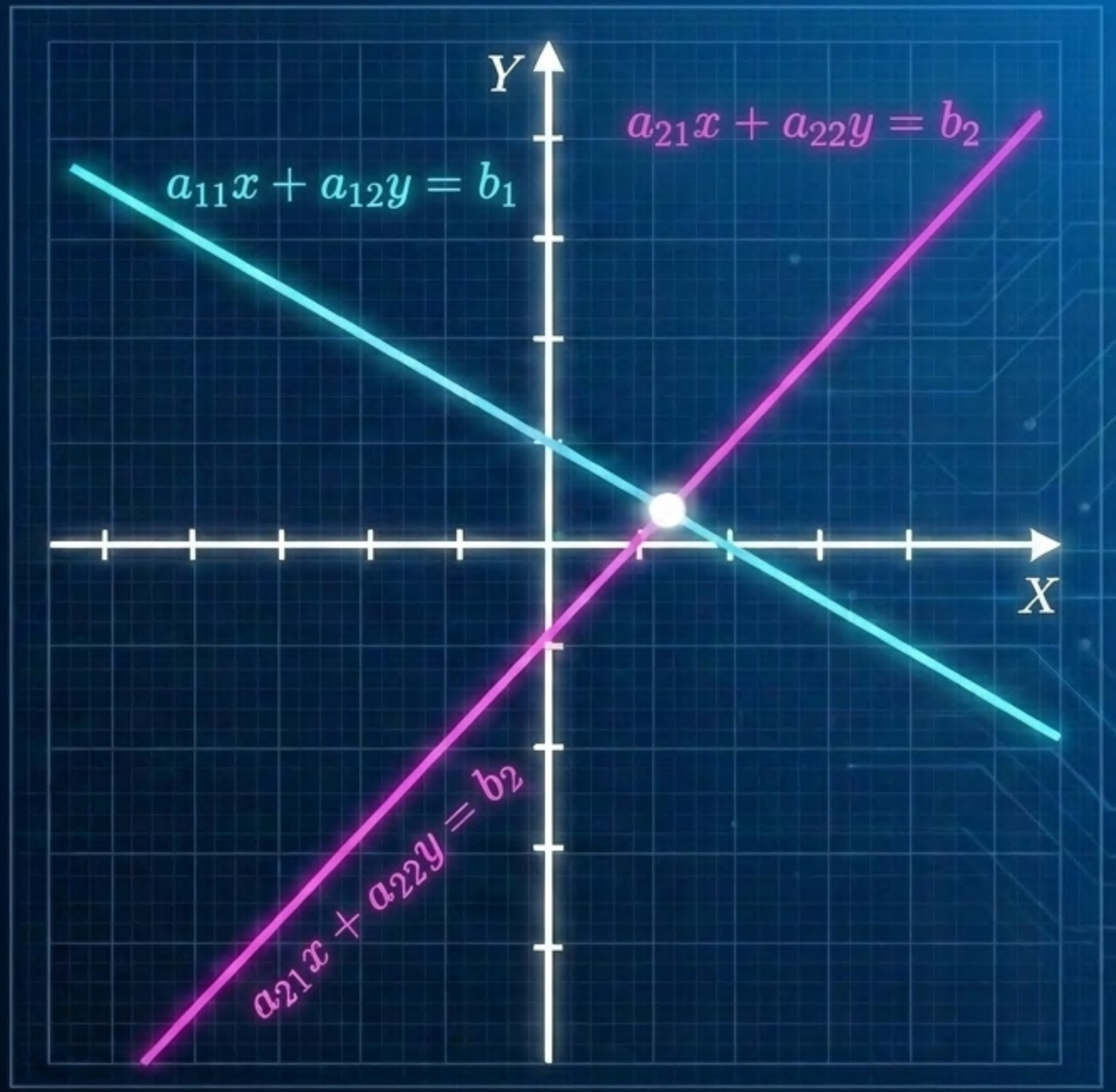
NotebookLM

O Espelho Geométrico

Cada equação do sistema é, na verdade, a identidade algébrica de uma reta no plano cartesiano.

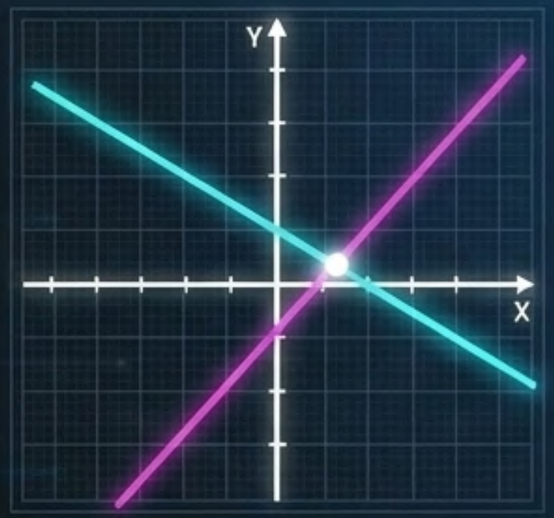
Resolver o sistema significa descobrir a relação espacial entre essas duas retas.

A solução do sistema é exatamente o **ponto de interseção** (se existir) entre as retas.



NotebookLM

Os Três Cenários Possíveis

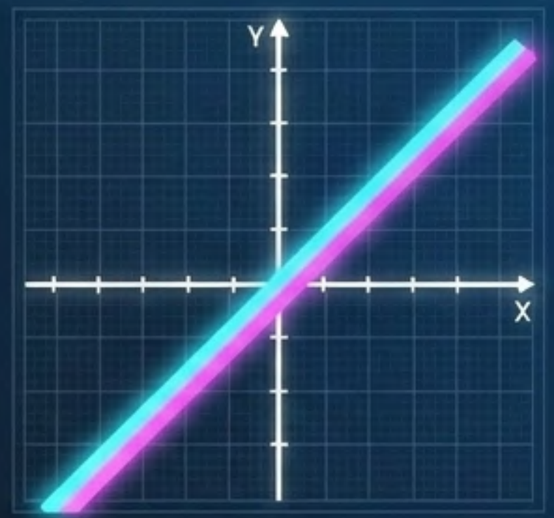


Retas Concorrentes

SPD

(Sistema Possível e Determinado)

Apresenta uma única solução (um único par x,y).

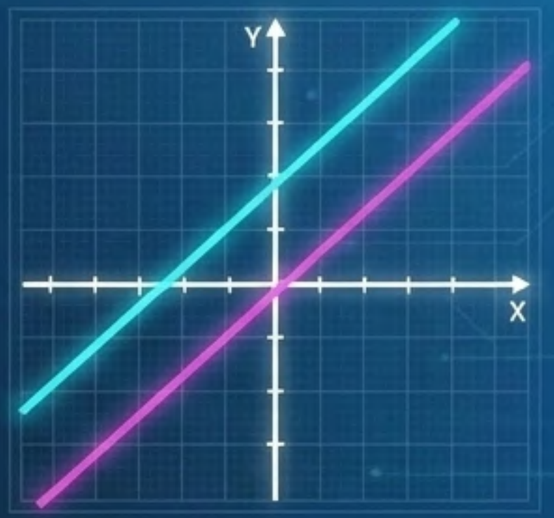


Retas Coincidentes

SPI

(Sistema Possível e Indeterminado)

Apresenta infinitas soluções (todos os pontos da reta).



Retas Paralelas

SI

(Sistema Impossível)

Não admite solução (nenhum ponto em comum).

NotebookLM

O Desafio Algébrico

Como o sistema nos revela sua geometria oculta puramente através dos números, sem que precisemos desenhar uma única linha?

Para descobrir, precisamos isolar as variáveis.
Iniciaremos a eliminação matemática.

NotebookLM

A Forja Algébrica: Eliminando a variável y

1. Multiplicação Estratégica:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \quad \big| * (a_{22}) \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \quad \big| * (-a_{12}) \end{aligned}$$

2. O Cancelamento:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y &= -b_2a_{12} \end{aligned}$$

3. Resultado (Fatorando x):

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

NotebookLM

A Forja Algébrica: Eliminando a variável x

1. Multiplicação Estratégica:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \quad \big| * (-a_{21}) \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \quad \big| * (a_{11}) \end{aligned}$$

2. O Cancelamento:

$$\begin{aligned} -a_{11}a_{21}x - a_{12}a_{21}y &= -b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y &= a_{11}b_2 \end{aligned}$$

3. Resultado (Fatorando y):

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

NotebookLM

O Padrão Oculto

Ao isolarmos as variáveis, um padrão matemático idêntico emerge inevitavelmente.

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

O termo destacado é a chave do sistema. Ele determina o comportamento de toda a equação. Batizamos ele de **Determinante Principal (D)**.

NotebookLM

O Nascimento dos Determinantes (Regra de Cramer)

Podemos encapsular essas expressões complexas usando a notação matricial de determinantes.

Determinante Principal

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de x

$$\mathcal{D}_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Determinante de y

$$\mathcal{D}_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

NotebookLM

O Sistema Reduzido

Substituindo os padrões algébricos pelos símbolos de determinantes recém-descobertos, nosso complexo sistema 2x2 colapsa em uma forma pura e elegante:

$$\mathcal{D} \cdot x = \mathcal{D}_x$$
$$\mathcal{D} \cdot y = \mathcal{D}_y$$

Agora, o destino geométrico das nossas retas depende inteiramente de uma única pergunta: O que acontece se formos isolar x e y passando o determinante D dividindo?

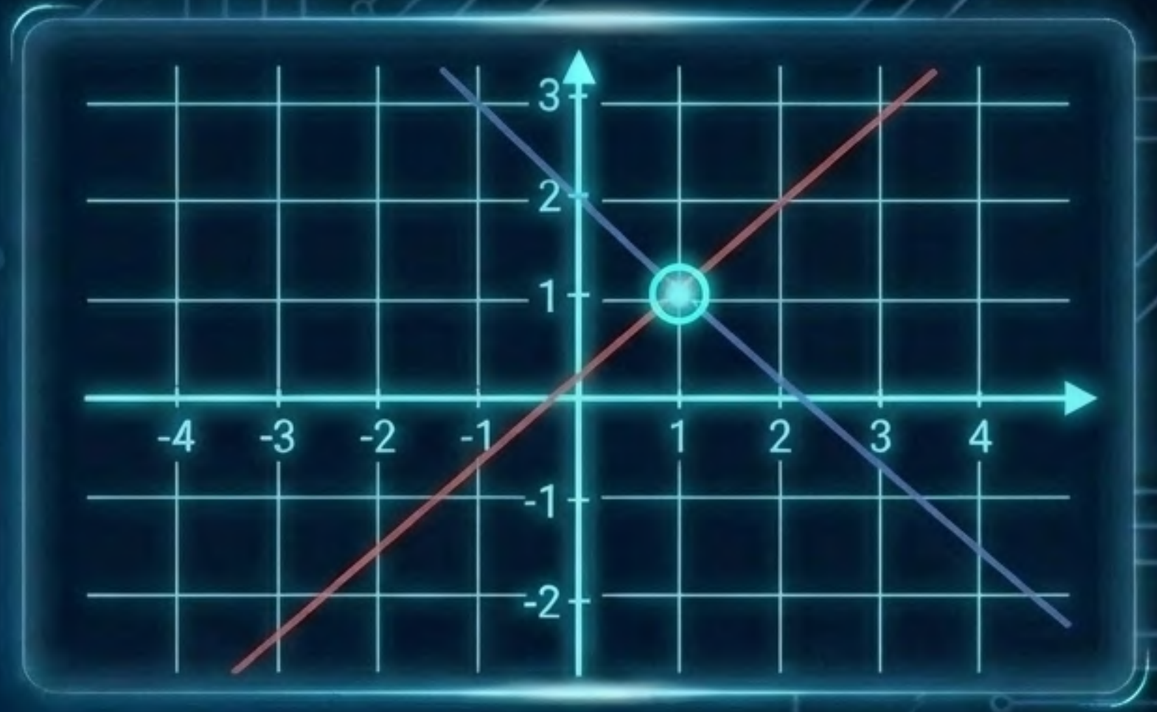
NotebookLM

Se $D \neq 0$, a matemática permite a divisão livre.

$$x = \frac{Dx}{D},$$

$$y = \frac{Dy}{D}.$$

As incógnitas assumem valores únicos e bem definidos.



Classificação: Sistema Possível e Determinado (SPD)

Geometria: Retas Concorrentes (um único ponto de cruzamento).

NotebookLM

Análise de Casos: O Abismo do Zero ($D = 0$)

$D = 0$

Se $D = 0$ e $Dx = 0$ e $Dy = 0$

- A equação vira: $0 \cdot x = 0$.
- **Lógica**: Qualquer número real satisfaz essa igualdade.
- **Classificação**: SPI (Sistema Possível e Indeterminado)
- **Geometria**: Retas Coincidentes.

Se $D = 0$ e ($Dx \neq 0$ ou $Dy \neq 0$)

- A equação vira: $0 \cdot x = \text{Número} \neq 0$ (Ex: $0 \cdot x = 5$).
- **Lógica:** Nenhum número multiplicado por zero resulta em algo diferente de zero. A igualdade é um absurdo.
- **Classificação:** SI (Sistema Impossível)
- **Geometria:** Retas Paralelas.

NotebookLM

A Matriz de Diagnóstico Final

Classificação	Condição Determinante	Equação Reduzida	Imagem Gráfica
SPD (Possível e Determinado)	$D \neq 0$	$x = \frac{D_x}{D}$ (Única)	
SPI (Possível e Indeterminado)	$D = 0$ e $D_x = D_y = 0$	$0 = 0$ (Infinitas)	
SI (Impossível)	$D = 0$ e $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$	$0 = k$ (Absurdo)	

NotebookLM