1. Oszthatósági vizsgálat

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(x+y)$-nal. Így a jobb oldalon megjelenik a köbök összege:

$$589(x+y)^2 = 47(x^3+y^3)$$

Mivel a 47 prímszám, és nem osztója a 589-nek ($589 = 19 \cdot 31$), ezért a 47-nek osztania kell az $(x+y)^2$ kifejezést. Ebből következik, hogy:

$$47 \mid (x+y)$$

2. Új változó bevezetése

Legyen $x+y = 47k$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$). Ezt visszahelyettesítve a kiindulási egyenletbe, majd 47-tel egyszerűsítve kapjuk:

$$589k = x^2 - xy + y^2$$

Alakítsuk át a jobb oldalt a jól ismert azonossággal: $x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$.

$$589k = (47k)^2 - 3xy \Longrightarrow 3xy = 2209k^2 - 589k$$

3. Korlátozás felírása

Fejezzük ki az $(x-y)^2$ értékét, ami egészek (és valósak) körében nem lehet negatív:

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (47k)^2 - 4 \cdot \frac{2209k^2 - 589k}{3} = \frac{2356k - 2209k^2}{3}$$

Mivel $(x-y)^2 \geq 0$, ezért:

$$k(2356 - 2209k) \geq 0$$

Ez az egyenlőtlenség az egész számok halmazán kizárólag $\boldsymbol{k = 0}$ vagy $\boldsymbol{k = 1}$ esetén teljesülhet.

4. A megoldáspárok meghatározása

- **Ha $k = 0$:**
  Ekkor $x + y = 0$ és $x^2 - xy + y^2 = 0$, ami közvetlenül az $(0,0)$ triviális megoldást adja.

- **Ha $k = 1$:**
  Ekkor az összeg $x + y = 47$, a szorzat pedig a fenti képletből $xy = 540$.
  Ez a Viète-formulák alapján a $t^2 - 47t + 540 = 0$ másodfokú egyenletre vezet, melynek gyökei a 27 és a 20.

5. Végeredmény

Az egyenletnek pontosan három egész megoldáspárja van:

$$(x, y) \in \{(0,0), (27,20), (20,27)\}$$