Notación matricial de un sistema. Método de Gauss

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
2ºBach	2. Sistemas y programación lineal	Colegio Marista “La Inmaculada” de Granada

INFORMACIÓN GENERAL

Notación matricial de un sistema para facilitar la resolución mediante el método de Gauss. Rango del sistema

Vídeo asociado:

https://www.youtube.com/watch?v=YoT23Jqw5g4

OPERACIONES PERMITIDAS A LA HORA DE OPERAR EN EL MÉTODO DE GAUSS. CONCEPTO DE RANGO DEL SISTEMA

Por Gauss entendemos un método de simplificación de sistemas de ecuaciones donde aplicamos, de manera consecutiva, reducción para eliminar incógnitas. Con objeto de poder despejar más fácilmente el valor de las incógnitas en cada una de las ecuaciones.

Si llamamos **diagonal principal** a los coeficientes a_{ij} donde coincide el número de fila y el número de columna, en Gauss buscamos hacer 0 los coeficientes situados por encima o por debajo de esa diagonal principal.

¿Cómo podemos conseguirlo? Aplicando algunas de las operaciones descritas a continuación (**transformaciones lineales**).

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z = c'_1 \\ 0 + a'_{22}y + a'_{23}z = c'_2 \\ 0 + 0 + a'_{33}z = c'_3 \end{array} \right\}$$

$¿Operaciones\ permitidas\ en\ el\ método\ de\ Gauss?$

$-Intercambiar\ posición\ de\ filas: F_1 \leftrightarrow F_3$

$-Intercambiar\ posición\ de\ columnas: C_1 \leftrightarrow C_2$

$-Multiplicar\ una\ fila\ por\ un\ número\ distinto\ de\ cero: F'_2 = 3 \cdot F_2$

$-Sumar\ y\ restar\ filas: F'_3 = 2 \cdot F_3 - 4 \cdot F_1$

$-Dadas\ dos\ filas\ idénticas,\ eliminar\ una\ de\ ellas: si\ F_1 = F_2 \rightarrow Eliminamos\ por\ ejemplo\ F_2$

$-Dadas\ dos\ filas\ porporcionales,\ eliminar\ una\ de\ ellas: si\ F_1 = 5 \cdot F_2 \rightarrow Eliminamos\ por\ ejemplo\ F_1$

$-Eliminar\ filas\ con\ tautología\ 0 = 0$

Al sistema final que se obtiene tras el método de Gauss lo llamaremos sistema triangular. Una vez obtenido el sistema triangular, podremos determinar el **rango del**

sistema. Muy importante: calcularemos el rango una vez obtenido el sistema triangular, nunca antes.

El concepto de Rango nos informa del número de ecuaciones que no son proporcionales a otra ecuación, o que no se pueden escribir como suma o resta de las otras.

Concepto de rango de un sistema de ecuaciones tras aplicar el método de Gauss.

Tras terminar Gauss, no aparecer absurdos matemáticos y haber eliminado filas proporcionales, el rango de un sistema de ecuaciones es el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo.

Ejemplo de Rango 3 en sistemas 3×3

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 2y-z=1 \\ z=3 \end{array}\right\} \rightarrow Rango\ 3$$

Si el rango es igual al número de incógnitas→S.C.D.→Solución única
De $\mathbf{F_3}$ despejamos el valor de "z"→ De $\mathbf{F_2}$ despejamos el valor de "y"→ De $\mathbf{F_1}$ despejamos "x"

Según el rango del sistema, distinguiremos:

- SCD. Cuando el rango del sistema coincide con el número de incógnitas.
- SCI. Cuando el rango del sistema es inferior al número de incógnitas. La diferencia entre el número de incógnitas y el rango es igual al número de parámetros libres que aparecen en la solución.

En el momento en que aparezca un absurdo matemático durante el proceso de resolución por Gauss, el sistema será incompatible (SI) y no tendrá solución.

Ejemplo de Rango 2 en sistemas 3×3

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 2y-z=1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \rightarrow Rango\ 2\ por\ aparecer\ tautología\ en\ F_2$$

Si el rango es inferior al número de incógnitas→S.C.I.→Infinitas soluciones
Número de incógnitas - Rango = Número de parámetros libres → 3 - 2=1 parámetro libre

Otro ejemplo de Rango 2 en sistemas 3×3

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ z=1 \\ z=1 \end{array}\right\} \rightarrow Rango\ 2\ por\ ser\ F_2=F_3 \rightarrow Obviamos,\ por\ ejemplo,\ F_3$$

Si el rango es inferior al número de incógnitas→S.C.I.→Infinitas soluciones
Número de incógnitas - Rango = Número de parámetros libres → 3 - 2=1 parámetro libre

Y otro ejemplo más de Rango 2 en sistemas 3×3

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ z=4 \\ 2z=8 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Rango } 2 \textit{ por ser } F_2 \textit{ proporcional a } F_3 \rightarrow 2\cdot F_2 = F_3 \rightarrow \textit{Obviamos } F_3$$

Si el rango es inferior al número de incógnitas→S.C.I.→Infinitas soluciones
Número de incógnitas - Rango = Número de parámetros libres → 3 - 2=1 parámetro libre

En SCI con infinitas soluciones, a nivel de bachillerato, haremos ejercicios con 2 o 1 parámetro libre. Recuerda: 1 parámetro libre significa que la solución es una recta. 2 parámetros libres significa que la solución es un plano.

Ejemplo de Rango 1 en sistemas 3×3

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Rango } 1 \textit{ por aparecer dos tautologías}$$

Si el rango es inferior al número de incógnitas→S.C.I.→Infinitas soluciones
Número de incógnitas - Rango = Número de parámetros libres → 3 - 1=2 parámetros libre

Escribiendo el sistema en notación matricial es muy sencillo identificar visualmente los coeficientes que deben ser nulos tras aplicar el método de Gauss: los situados por debajo o por encima de la diagonal principal.

Notación matricial de un sistema de ecuaciones

¿Cómo saber qué coeficientes hacer nulos en el método de Gauss independientemente del tamaño del sistema?

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

$$\textit{Diagonal principal} \rightarrow a_{ij} \textit{ con } i=j$$

Hacer 0 en los coeficientes situados por debajo de la diagonal principal. Si la matriz del sistema es cuadrada, también podemos optar por hacer 0 por encima de la diagonal principal.