Grundlagen & Formeln

Diese Seite ist Teil des ***GeoGebra-Books*** Moebiusebene. (**Juli 2019**)

Auf den folgenden Seiten wollen wir sämtliche ***Sechs-Eck-Gewebe*** aus 3 Kreisbüscheln erfassen und auflisten. Wir werden sogar etwas allgemeiner sämliche Fälle mit Bahnkurven von ***W-Bewegungen*** - also auch mit ***Loxodromen-Scharen*** aufzählen.
Den ***Nachweis***, dass mit dieser Auflistung alle solche ***Sechs-Eck-Gewebe*** ermittelt sind, werden wir allerdings hier nicht im Detail durchführen (siehe ↪ *Literaturverzeichnis* **[FÜW]**)

Es seien $\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2, \vec{\mathbf{g}}_3 \in \mathcal{G}$ paarweise reell linear unabhängige Infinitesimale Erzeugende von drei ***Moebius-W-Bewegungen***.
Durch $\vec{\mathbf{g}}_i \bullet \vec{\mathbf{p}} \equiv 1$ mit $\vec{\mathbf{p}} \in \mathcal{G}, \vec{\mathbf{p}}^{\,2} = 0$ werden ***Vektorfelder*** X_i in der Moebiusebene definiert, deren Bahnkurven die Kreise, bzw. die Loxodrome des Büschels sind.

In einer ↪ *euklidischen Karte* gehören hierzu die Vektorfelder

- $X_i = \mathbf{Re}(\vec{\mathbf{g}}_i \bullet \vec{\mathbf{p}}(z))\,\partial_x + \mathbf{Im}(\vec{\mathbf{g}}_i \bullet \vec{\mathbf{p}}(z))\,\partial_y$ für $i = 1, 2, 3$.

Da nach Voraussetzung die 3 infinitesimalen Bewegungen $\vec{\mathbf{g}}_i$ paarweise reell-linear-unabhängig sind, zeigen in jedem Punkt der Ebene die Tangentialvektoren in 3 verschiedene Richtungen - ausgenommen in den ↪ ***Berührorten*** der Bewegungen:

- Es seien $\mathbf{H}_1 = \vec{\mathbf{g}}_2 \overset{\wedge}{_h} \vec{\mathbf{g}}_3$, $\mathbf{H}_2 = \vec{\mathbf{g}}_3 \overset{\wedge}{_h} \vec{\mathbf{g}}_1$ und $\mathbf{H}_3 = \vec{\mathbf{g}}_1 \overset{\wedge}{_h} \vec{\mathbf{g}}_2$ die zugehörigen **CASSINI**-Quartiken.

Der Typ und die Lage dieser 3 ***Berührorte*** ist kennzeichnend dafür, ob ein ***Sechs-Eck-Gewebe*** vorliegt oder nicht.
Wenn ein solches vorliegt, dann gilt die ***Sechs-Ecks-Bedingung*** jeweils in den offenen zusammenhängenden Teilgebieten der Ebene, welche von den **CASSINI**-Quartiken berandet werden.
Man prüft nun unschwer nach, dass mit den reellwertigen Funktionen $\mu_i(z) := \mathbf{H}_i \vec{\mathbf{p}}(z) \bullet \vec{\mathbf{p}}(z)$, $i = 1, 2, 3$ gilt:

- $\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 = 0$ **Linearkombination der 3 Vektorfelder**

Die Funktionen μ_i hängen von der Normierung der Berührgeradenvektoren $\vec{\mathbf{p}}(z)$ und damit von der Wahl der euklidischen Basis ab. Unser Ziel ist es, die ***Sechs-Eck-Bedingung*** in moebiusgeometrisch invarianter Form aufzustellen.
Dazu setzen wir mit einer zunächst beliebigen **HERMITE**schen Form $\mathbf{H} \neq 0$:

- $\lambda_i(z) := \dfrac{\mathbf{H}_i \vec{\mathbf{p}}(z) \bullet \vec{\mathbf{p}}(z)}{\mathbf{H} \vec{\mathbf{p}}(z) \bullet \vec{\mathbf{p}}(z)}$, $i = 1, 2, 3$

Es gilt wiederum $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0$.
Um die Koeffizienten des **LIE**-Produkts $[X_1, X_2] = \tau_1 \cdot X_1 - \tau_2 \cdot X_2$ zu bestimmen,

beachten wir, dass $[X_1, X_2]$ wiederum das Vektorfeld einer ***W-Kurvenschar*** ist, die zugehörige Erzeugende ist $-[\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2]$ *) das - Zeichen wird unten erkärt!

Wir ermitteln ähnlich wie oben die **Linearkombination der Vektorfelder** $X_1, X_2, [X_1, X_2]$,
in dem wir $-[\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2]$ anstelle von $\vec{\mathbf{g}}_3$ setzen:

- $\tau_1 = -\dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2] \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_2}{\vec{\mathbf{g}}_1 \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_2}, \qquad \tau_2 = -\dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2] \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_1}{\vec{\mathbf{g}}_1 \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_2}$

Drei **MOEBIUS-*W-Kurvenscharen*** mit den paarweise reell-linear unabhängigen Infinitesimalen $\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2, \vec{\mathbf{g}}_3$ bilden genau dann ein ***Sechs-Eck-Gewebe***, wenn gilt:

- $0 = [\vec{\mathbf{g}}_1, \tau_1] - [\vec{\mathbf{g}}_2, \tau_2] + \tau_1 \dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \lambda_2]}{\lambda_2} - \tau_2 \dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_2, \lambda_1]}{\lambda_1} + \left[\vec{\mathbf{g}}_2, \dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \lambda_2]}{\lambda_2}\right] - \left[\vec{\mathbf{g}}_1, \dfrac{[\vec{\mathbf{g}}_2, \lambda_1]}{\lambda_1}\right]$

Dabei ist $\lambda_i = \dfrac{\mathbf{H}_i}{\mathbf{H}}$ mit einer zunächst beliebigen **HERMITE**schen Form $\mathbf{H}$.
Diese ***Sechseck-Bedingung*** für 3 ***W-Kurvenscharen*** in der **MOEBIUS**-Ebene folgt aus der ↪ ***Sechseck-Bedingung*** für 3 ebene Vektorfelder im Allgemeinen.

Setzt man nun $\mathbf{H} = \mathbf{H}_3$, so reduziert sich die Bedingung *) auf:

$$
\begin{aligned}
0 \equiv\ & \frac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_3]}{\mathbf{H}_3}\frac{[\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_1]}{\mathbf{H}_1} - \frac{[\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_3]}{\mathbf{H}_3}\frac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_2]}{\mathbf{H}_2} \\
& + \frac{\big[\vec{\mathbf{g}}_2, [\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_2]\big]}{\mathbf{H}_2} - \frac{\big[\vec{\mathbf{g}}_1, [\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_1]\big]}{\mathbf{H}_1} \\
& + \frac{[\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_1] \cdot [\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_1]}{{\mathbf{H}_1}^2} - \frac{[\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_2] \cdot [\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_2]}{{\mathbf{H}_2}^2}
\end{aligned}
$$

Die Gleichung ist Grundlage für die folgende Klassifizierung der möglichen ***Sechs-Eck-Netze*** aus ***W-Kurvenscharen***.
Zunächst gilt:
Ist eine **CASSINI**-Form $\mathbf{H} = \vec{\mathbf{g}} \wedge_h \vec{\bar{\mathbf{g}}}$ invariant unter einer infinitesimalen Bewegung $\vec{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}, \vec{\mathbf{g}} \neq \mathfrak{o}$,
d.h. es ist $[\vec{\mathbf{g}}, \mathbf{H}] = \lambda \cdot \mathbf{H}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so zerfällt die ***Quartik***.
Denn eine irreduzible **CASSINI**-***Quartik*** kann nicht invariant unter einer **MOEBIUS**-***W-Bewegung*** sein!

Aus der Gleichung folgt nun:

- Eine ***notwendige Bedingung*** für ein ***Sechs-Eck-Gewebe*** aus **MOEBIUS**-***W-Kurvenscharen***
  ist das Zerfallen der 3 **CASSINI**-***Quartiken*** $\vec{\mathbf{g}}_1 \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_2, \vec{\mathbf{g}}_2 \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_3, \vec{\mathbf{g}}_3 \wedge_h \vec{\mathbf{g}}_1$

Begründung: Für die Teilbarkeitsüberlegungen schreiben wir die Gleichung , auf Hauptnenner gebracht, in der Form:

- $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}_1 = [\vec{\mathbf{g}}_2, \mathbf{H}_1] \cdot [\vec{\mathbf{g}}_1, \mathbf{H}_1] \cdot \mathbf{H}_2^2 \cdot \mathbf{H}_3$

Wäre z.B. $\mathbf{H}_1$ irreduzibel, so müßte $\mathbf{H}_1$ ein Teiler der rechten Seite sein; dies wäre nur möglich, wenn $\mathbf{H}_1$ invariant unter $\vec{\mathbf{g}}_1$, oder $\vec{\mathbf{g}}_2$ wäre, da die Formen wesentlich verschieden sind.

Ergänzungen: *) Der Übergang von einer Infinitesimalen $\vec{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}$ zum zugehörigen Vektorfeld $X_{\vec{\mathbf{g}}}$ ist ein *Anti-Isomorphismus* der **LIE**-Algebren: $[\vec{\mathbf{g}}_1, \vec{\mathbf{g}}_2] \mapsto -[X_{\vec{\mathbf{g}}_1}, X_{\vec{\mathbf{g}}_2}]$. Dies ändert an den Formeln nicht Wesentliches!

Wie ändert sich der Quotient zweier **HERMITE**scher Formen $\tau = \dfrac{\tilde{\mathbf{H}}}{\mathbf{H}}$ unter der Wirkung eines Vektorfeldes $X_{\vec{\mathbf{g}}}$ mit zugehöriger Infinitesimalen $\vec{\mathbf{g}} \in \mathcal{G}$?

per definitionem gilt in $\mathbb{C}$: $(X_{\vec{\mathbf{g}}}\tau)(z) = \dfrac{d}{dt}\tau(z(t))\Big|_{t=0}$, wobei $z(t)$ eine Integralkurve von $X_{\vec{\mathbf{g}}}$ mit $z(0) = z$ ist

Für die Bahnkurven $\tau(z(t)) = \tau\left(\exp t\vec{\mathbf{g}}\, \vec{\mathbf{p}}(z)\right)$ der ***W-Bewegungen*** gilt: $\vec{\mathbf{p}}'(t) = [\vec{\mathbf{g}}, \vec{\mathbf{p}}(t)]$ für $\vec{\mathbf{p}}(t) = \exp t\vec{\mathbf{g}}\, \vec{\mathbf{p}}$.

Ist speziell $\mathbf{H} = \vec{\vec{\mathbf{g}}} \wedge_h \vec{\vec{\vec{\mathbf{g}}}}$, eine **CASSINI**-Form, so gilt für die infinitesimale Änderung unter $\exp t\vec{\mathbf{g}}$:

- $\left[\vec{\mathbf{g}}, \vec{\vec{\mathbf{g}}} \wedge_h \vec{\vec{\vec{\mathbf{g}}}}\right] = \left[\vec{\vec{\mathbf{g}}}, \vec{\mathbf{g}}\right] \wedge_h \vec{\vec{\vec{\mathbf{g}}}} + \vec{\vec{\mathbf{g}}} \wedge_h \left[\vec{\vec{\vec{\mathbf{g}}}}, \vec{\mathbf{g}}\right]$.

– Walter Füchte