

CHALMERS: Arkitektur och teknik, Automation och mekatronik,
Elektroteknik, Teknisk fysik, Teknisk kemi, Teknisk matematik

KTH: Design och produktframtagning, Elektroteknik, Farkostteknik,
Maskinteknik, Materialdesign, Teknisk fysik, Teknisk matematik

SU: Kandidatprogrammen i matematik, i matematik och
datavetenskap, i matematik och maskininlärning, i matematisk ekonomi
och statistik, i astronomi, i fysik, i meteorologi, samt
Sjukhusfysikerprogrammet

GU: Kandidatprogrammen i fysik, samt i matematik

Antagningsprov 2025 - MATEMATIK - SVAR

A.

- 1d
- 2c
- 3c
- 4a
- 5c
- 6c
- 7b
- 8a
- 9d
- 10c
- 11c
- 12a
- 13b
- 14c
- 15d
- 16c
- 17a
- 18d
- 19b
- 20b

B.

- 21: $-\frac{5}{14}$;
- 22: -1 ;
- 23: $\frac{4e}{9}$;
- 24: $-\ln 3 + \frac{\pi}{2}$;
- 25: $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$;
- 26: e^4 ;
- 27: 124 ;
- 28: $b(\sqrt{3}-1)$ l.e.;
- 29: $\frac{1}{2}$ l.e.;
- 30: $6\sqrt{2}$ l.e..

C. *Lösning:* Vi undersöker först fallet $p = 0$, då den andra ekvationen blir en förstgradsekvation. Direkt kontroll visar att de två ekvationerna inte har gemensamma lösningar i det fallet. I fortsättningen antar vi att $p \neq 0$.

Kvadratkomplettering ger nu

$$x^2 + 2x + p = (x + 1)^2 - (1 - p) = 0,$$

vilket betyder att den första ekvationen har reella lösningar för $p \leq 1$. Dessa lösningar är

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - p}.$$

För $p \neq 0$ är den andra ekvationen ekvivalent med $x^2 + \frac{2}{p}x + \frac{1}{p} = 0$. Kvadratkomplettering ger för den

$$x^2 + \frac{2}{p}x + \frac{1}{p} = \left(x + \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{1 - p}{p^2} = 0.$$

Även den har reella lösningar för $p \leq 1$, $p \neq 0$, och dessa är

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - p}}{p}.$$

Eftersom $p \neq 1$ och $-1 \pm \sqrt{1 - p} \neq 0$ för $p \neq 0$, har vi att

$$-1 + \sqrt{1 - p} \neq \frac{-1 + \sqrt{1 - p}}{p} \quad \text{och} \quad -1 - \sqrt{1 - p} \neq \frac{-1 - \sqrt{1 - p}}{p}.$$

Därmed återstår att undersöka möjligheterna

$$-1 + \sqrt{1 - p} = \frac{-1 - \sqrt{1 - p}}{p},$$

och

$$-1 - \sqrt{1 - p} = \frac{-1 + \sqrt{1 - p}}{p}.$$

I det första fallet ger förlängning med p likheten $-p + p\sqrt{1 - p} = -1 - \sqrt{1 - p}$, som är ekvivalent med $1 - p = -(p + 1)\sqrt{1 - p}$. Den sista likheten är omöjlig för $p > -1$, eftersom de båda leden i det fallet har olika tecken. För $p \leq -1$ är båda leden icke-negativa. Under den förutsättningen får vi efter kvadrering den ekvivalenta likheten $1 - p = p^2 + 2p + 1$, som har lösningarna $p = 0$ och $p = -3$. Av dessa är uppfyller endast $p = -3$ villkoren.

I det andra fallet får vi på samma sätt likheten $1 - p = (p + 1)\sqrt{1 - p}$. Denna likhet är omöjlig för $p < -1$, då de båda leden för sådana p -värden har olika tecken. Under förutsättningen $p \geq -1$ kan vi kvadrera och får återigen $1 - p = p^2 + 2p + 1$ med lösningarna $p = 0$ och $p = -3$. Nu är det dock ingen av dem som uppfyller våra villkor.

De två ekvationerna har alltså exakt en gemensam lösning endast för $p = -3$, då

$$-1 + \sqrt{1 - p} = \frac{-1 - \sqrt{1 - p}}{p} = 1.$$