Resolver ecuaciones de segundo grado

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach	Repaso 4ºESO	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

Una ecuación de segundo grado viene representada por la expresión general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La **fórmula de Bhaskara** (matemático indio del s. XII), o también conocida como fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado, se deduce así:

- Multiplicamos la expresión por $4a$.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

- Sumamos en ambos miembros un factor b^2.

$$\mathrm{b}^2 + 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = b^2$$

- Pasamos el factor $4ac$ restando a la derecha.

$$\mathrm{b}^2 + 4a^2x^2 + 4abx = b^2 - 4ac$$

- Reordenamos el miembro de la izquierda.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

- Recordamos la expresión del binomio de la suma para escribir el miembro de la izquierda como una identidad notable.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

- Aplicamos raíz cuadrada en ambos miembros, sin olvidar el doble signo.

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Pasamos b restando a la derecha.

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Finalmente, despejamos el valor de la incógnita x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde hemos obtenido las dos posibles soluciones que, como máximo, pueden aparecer en una ecuación de segundo grado.

Si el discriminante (interior de la raíz) es negativo, significa que la ecuación de segundo grado no tiene solución.

Si el discriminante es igual a cero, ocurre que la ecuación de segundo grado tiene una única solución.

Si el discriminante es positivo, implica que la ecuación de segundo grado tendrá dos soluciones distintas.

Una alternativa a esta fórmula es el **método de Cardano-Vieta**, que recibe el nombre de un matemático italiano del s. XVI y de un matemático francés del s. XVII.

Supongamos que nuestra ecuación de segundo grado posee dos soluciones, que llamaremos x_1 y x_2. Por lo tanto, podemos factorizar el polinomio de grado dos que aparece en la ecuación de segundo grado:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Recuerda que el coeficiente líder a siempre debe aparecer multiplicando en la factorización.

Si desarrollamos el producto de los paréntesis:

$$a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) = 0$$

Reordenamos los términos del interior del paréntesis.

$$a(x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2) = 0$$

El factor a entra dentro del paréntesis.

$$ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1x_2 = 0$$

Si comparemos esta expresión con la forma generalizada de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Podemos comparar término a término:

$$a(-x_1 - x_2) = b \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$ax_1x_2 = c \rightarrow x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Es decir, si la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, se cumple lo siguiente:

- La suma de las soluciones es igual al opuesto de b/a.
- El producto de las dos soluciones es igual a c/a.

Las expresiones de Cardano-Vieta son especialmente útiles si las raíces son número enteros, ya que mentalmente no es difícil sacar los valores que cumplen ambas condiciones. Por ejemplo:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$a = 1, b = 4, c = -5$$

$$x_1 + x_2 = -4$$

$$x_1x_2 = -5$$

Las dos soluciones deben sumar -4 y multiplicar -5. Por ejemplo:

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = -5$$

Cardano-Vieta es un buen ejercicio de cálculo mental. Si la cosa se complica, siempre podemos recurrir a la fórmula general del método de Bhaskara.