Problemas – Tema 5

CCSS Problemas resueltos - 10 - regla de Barrow

1. Resuelve $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

Aplicamos partes.

$$x=u \quad \rightarrow \quad dx=du$$

$$\frac{1}{\cos^2(x)}=dv \quad \rightarrow \quad tg(x)dx=dv$$

Es decir:

$$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg(x)dx=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{sen(x)}{\cos(x)}dx$$

$$I=[x\cdot tg(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}+[\ln(\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{4}}$$ → aplicamos Barrow

Recuerda que $\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y que $\cos(0)=1$

$$I=\left(\frac{\pi}{4}\cdot tg(\frac{\pi}{4})-0\right)+\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln(1)\right)$$

$$I=\frac{\pi}{4}+\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4}+\ln(\sqrt{2})-\ln(2)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)-\ln(2)$$

$$I=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)$$

2. Calcula $\int_1^{16} \frac{d\,x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **(sugerencia:** $t=\sqrt[4]{x}$ **)**

Diferenciamos el cambio de variable → $t=x^{1/4} \rightarrow dt=\frac{1}{4}\cdot x^{-3/4}dx \rightarrow 4\cdot x^{3/4}dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^3=x^{3/4}$ → Por lo tanto $4\cdot t^3\,dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^2=x^{1/2}$

Llevamos todos estos resultados a la integral definida.

$$\int_1^{16} \frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16}\frac{t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16}\frac{t^2}{t+1}dt$$

Tenemos un cociente de polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del numerador, por lo que debemos realizar la división de polinomios.

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

$$4\int_1^{16}[t-1+\frac{1}{t+1}]dt=4[\int_1^{16}t\,dt-\int_1^{16}dt+\int_1^{16}\frac{1}{t+1}dt]=4[[\frac{t^2}{2}]_1^{16}-[t]_1^{16}+[\ln|1+t|]_1^{16}]$$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$. Pero antes de evaluar por Barrow, deshacemos el cambio de variable $t=\sqrt[4]{x}$.

$$4[[\frac{\sqrt{x}}{2}]_1^{16}-[\sqrt[4]{x}]_1^{16}+[\ln|1+\sqrt[4]{x}|]_1^{16}]=4[(\frac{4}{2}-\frac{1}{2})-(2-1)+(\ln|3|-\ln|2|)]=4[\frac{1}{2}+\ln(\frac{3}{2})]=2+4\ln(\frac{3}{2})$$

3. Calcula $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx$

Resolvemos, en primer lugar, la integral indefinida.

Tenemos un cociente de polinomios, con grado el numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble $x=0$ y una raíz simple $x-1=0$, por lo que descomponemos de la siguiente forma:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^2+1=A\,x(x-1)+B(x-1)+C\,x^2$$

Fíjate como la raíz doble $x=0$ aparece en dos denominadores, $\frac{A}{x}$ y $\frac{B}{x^2}$. Damos valores.

Si $x=1 \rightarrow 2=C$

Si $x=0 \rightarrow 1=-B \rightarrow B=-1$

Si $x=2 \rightarrow 5=2A+B+4C \rightarrow 5=2A-1+8 \rightarrow A=-1$

Por lo que la integral indefinida se descompone en tres fracciones.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{-1}{x^2}dx+\int \frac{2}{x-1}dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C$$

Para resolver la integral definida aplicamos la **regla de Barrow**.

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=\left[-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|\right]_2^3=-\ln(3)+\frac{1}{3}+2\ln(2)-\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}+2\ln(1)\right)$$

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx=-\ln(3)+\frac{1}{3}+3\ln(2)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}+3\ln(2)-\ln(3)$$

4. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

a) $\int_2^3 f(x)dx$

b) $\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)dx$

c) $\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)dx$

a) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)dx$

Al aplicar la regla de Barrow en $\int_2^3 f(x)dx=[F(x)]_2^3=F(3)-F(2)=2-1=1$

b) $I=\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)dx=5\int_2^3 f(x)dx-7\int_2^3 dx=5[F(x)]_2^3-7[x]_2^3=5\cdot(F(3)-F(2))-7\cdot(3-2)$

$I=5\cdot(2-1)-7\cdot 1=5-7=-2$

c) Si $F(x)=\int f(x)dx$ $\rightarrow$ $F'(x)=f(x)$ $\rightarrow$ Por lo tanto:

$$I=\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)dx=\int_2^3 F^2(x)\cdot F'(x)dx=\left[\frac{1}{3}F^3(x)\right]_2^3$$

Donde nos damos cuenta que dentro de la integral definida tenemos la potencia de una función por la derivada de esa función.

$$I=\frac{1}{3}\cdot(F^3(3)-F^3(2))=\frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$$

5. Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$

$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$ → Resolvemos por partes → $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$

$u(x)=\ln(4-x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{-1}{4-x}$

$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$

Sustituimos y aplicamos la regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ → $F(x)=\int f(x)\,dx$ → se cumple $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

$$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx=\left[u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx\right]_{-1}^{1}$$

$$I=\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx=[x\ln(4-x)]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{-x}{4-x}\,dx=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1}\frac{4-x-4}{4-x}\,dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-\int_{-1}^{1}dx-\int_{-1}^{1}\frac{-4}{4-x}\,dx=[\ln(3)+\ln(5)]-[x]_{-1}^{1}+4\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-x}\,dx$$

$$I=[\ln(3)+\ln(5)]-[1+1]-4[\ln(4-x)]_{-1}^{1}=[\ln(3)+\ln(5)]-2-4[\ln(3)-\ln(5)]$$

$$I=-3\ln(3)+5\ln(5)-2=-\ln(27)+\ln(3125)-2=\ln\left(\frac{3125}{27}\right)-2=\ln(115{,}74)-2\simeq 2{,}75$$

6. Calcula $\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

Resolvemos la integral indefinida aplicando partes.

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

$$I=\int x\ln(1+x)\,dx$$

$$u(x)=\ln(1+x)\ \rightarrow\ u'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$v'(x)=x\ \rightarrow\ v(x)=\frac{x^2}{2}$$

$$I=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x}\,dx$$

Realizamos la división del cociente de polinomios.

$$x^2=(1+x)\cdot(x-1)+1\ \rightarrow\ \frac{x^2}{1+x}=x-1+\frac{1}{1+x}$$

$$I=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}\int[x-1+\frac{1}{1+x}]dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}[\int x\,dx-\int dx+\int\frac{1}{1+x}dx]$$

$$I=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$$

Para resolver la integral definida, aplicamos la regla e Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)\,dx\ \rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|]_0^1$$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\ln(2)-(0-0+0-0)$$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{4}$$

7. Calcula $\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx$

Tenemos la integral de un cociente de polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del denominador. Realizamos la división de polinomios.

$$x^2+x+6=(x-2)(x+3)+12 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2+x+6}{x-2}=x+3+\frac{12}{x-2}$$

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx=\int_3^5 \left(x+3+\frac{12}{x-2}\right)dx=\int_3^5 x\,dx+\int_3^5 3\,dx+\int_3^5 \frac{12}{x-2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}[x^2]_3^5+3[x]_3^5+12[\ln|x-2|]_3^5=\frac{1}{2}\cdot(25-9)+3(5-3)+12(\ln(3)-\ln(1))=27{,}18$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow: si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)\,dx$ $\rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

8. Calcula $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}dx$ **.**

En primer lugar resolvemos la siguiente integral indefinida → $\int (x^2+x+1)e^{-x}dx$

Integramos por partes.

$$u=x^2+x+1 \;\rightarrow\; du=(2x+1)dx$$
$$dv=e^{-x}dx \;\rightarrow\; v=-e^{-x}$$
$$I=-(x^2+x+1)e^{-x}+\int (2x+1)e^{-x}dx$$

Integramos nuevamente por partes.

$$u=2x+1 \;\rightarrow\; du=2dx$$
$$dv=e^{-x}dx \;\rightarrow\; v=-e^{-x}$$
$$I=-(x^2+x+1)e^{-x}-(2x+1)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx \;\rightarrow\; I=-(x^2+x+1)e^{-x}-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$$

Operamos para simplificar la solución final.

$$I=-(x^2+x+1+2x+1+2)e^{-x}+C \;\rightarrow\; I=-(x^2+3x+4)e^{-x}+C$$

Retomamos la integral definida de partida.

$$\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}dx=[-(x^2+3x+4)e^{-x}]_0^1=\frac{-8}{e}+4=\frac{-8+4e}{e}$$

9. Calcula:

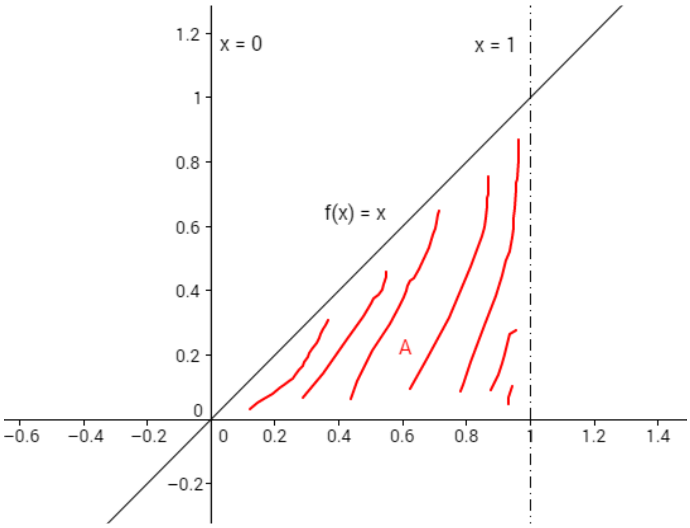
a) La integral definida $\int_0^1 x\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$ **.**

a) $\int_0^1 x\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0) \rightarrow \int_0^1 x\,dx=[\frac{x^2}{2}]_0^1=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}$

b) La función $f(x)=x$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\ u^2$$



10. Calcula:

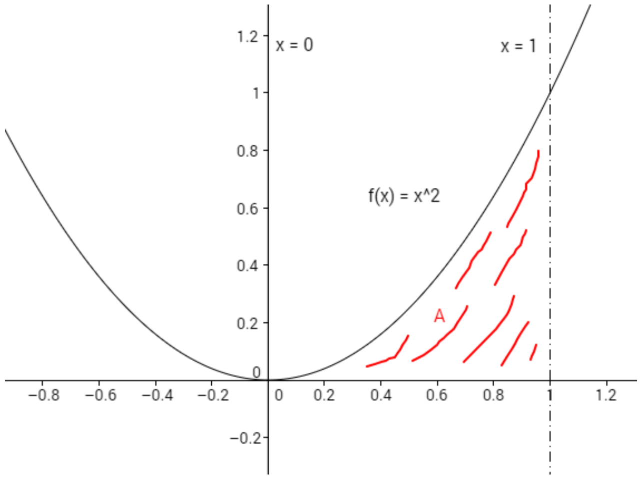
a) La integral definida $\int_0^1 x^2\,dx$ **.**

b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$

a) $\int_0^1 x^2\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0) \ \rightarrow \ \int_0^1 x^2\,dx=[\frac{x^3}{3}]_0^1=\frac{1^2}{3}-0=\frac{1}{3}$

b) La función $f(x)=x^2$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\ u^2$$



11. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (5x-x^2)\,dx$ **.**

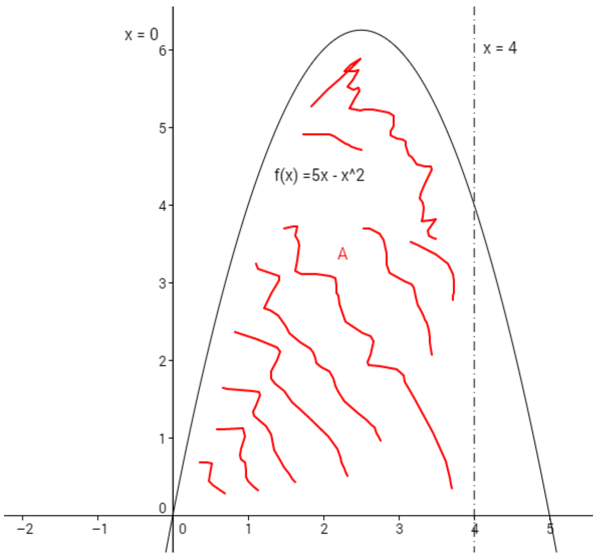
b) El área encerrada por la función $f(x)=5x-x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

a) $\int_0^4 (5x-x^2)dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)$

$$\int_0^4 (5x-x^2)dx=[5\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}]_0^4=5\cdot\frac{16}{2}-\frac{64}{3}-(0)=\frac{80}{2}-\frac{64}{3}=\frac{56}{3}$$

b) La función $f(x)=5x-x^2$ es positiva en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^4 (5x-x^2)dx=\frac{56}{3}\ u^2$$



12. Calcula $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$

$$I=\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx=3\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx-\int_1^2 \frac{1}{x}dx+\int_1^2 x\,dx=\frac{-3}{2}\left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2-[\ln|x|]_1^2+\frac{1}{2}[x^2]_1^2$$

$$I=\frac{-3}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)-(\ln(2)-\ln(1))+\frac{1}{2}[4-1]=\frac{9}{8}-\ln(2)+\frac{3}{2}=\frac{21}{8}-\ln(2)$$