LÖSUNGEN freiwilliger Zusatzaufgaben

6. Berechnen Sie den Inhalt der weißen Fläche des „Auges“

Beobachtung: Das Auge besteht aus einer Funktion f oberhalb der x-Achse mit den Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ und der gleichen, an der x-Achse gespiegelten Funktion g. In der Mitte liegt ein Kreis, der nicht zur Fläche gezählt wird.

Plan:

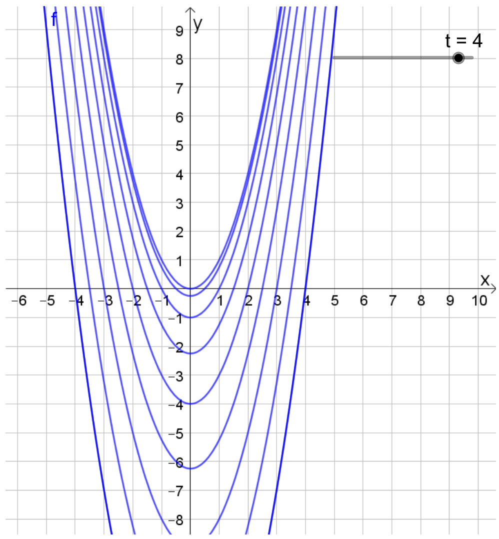
- Berechnung des Integrals von f in den Grenzen vom 0 bis 8.
- Verdoppeln des Ergebnisses (für die gespiegelte Funktion).
- Subtraktion der Kreisfläche.
- $\int_0^8 \left|-\frac{1}{8}x(x-8)\right| dx = \int_0^8 \left|-\frac{1}{8}x^2+1\right| dx = \left|\left[-\frac{1}{24}x^3+1x\right]_0^8\right| = |F(8)-F(0)| = 10\frac{2}{3}$

$$10\frac{2}{3} \cdot 2 = 21\frac{1}{3}$$

$$A_o = \pi r^2 \Longrightarrow 2^2\pi = 4\pi$$

$$21\frac{1}{3} - 4\pi = 8{,}7670FE$$

7. Die Funktionsgleichung $f_t(x) = x^2 - t^2$ wird durch folgende Funktionenschaar graphisch beschrieben:



Gesucht ist nun der Wert von tt, bei dem die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse 36 beträgt.

Plan:
- Nullstellen bestimmen
- Flächeninhalt im Bereich von $[NSt_1; NSt_2]$ in Abhängigkeit von t bestimmen.
- Den von t abhängigen Flächeninhalt gleich 36 setzen und nach t auflösen.

Nullstellen: $f_t(x) = 0$

$$0 = x^2 - t^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = t^2$$

$$\Longrightarrow x_1 = t \quad \wedge \quad x_2 = -t$$

Integral mit den Nullstellen als Grenzen bestimmen:

$$A(t) = \int_{-t}^{t} |x^2 - t^2|\, dx = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - t^2x\right]_{-t}^{t}\right| = \frac{4}{3}t^3$$

Den von t abhängigen Flächeninhalt gleich 36 setzen und nach t auflösen:

$$\frac{4}{3}t^3 = 36 \Longrightarrow t = 3$$