A 290. feladat analitikus megoldása

Feladat:
Egy 1954 területű körbe (ahol a megadott érték a sugár négyzete: $R^2 = 1954$) írt egye
szárú háromszög területe 2027. Mennyi a háromszög kerülete?

1. Kiinduló adatok és összefüggések

- A kör sugarának négyzete: $R^2 = 1954 \Longrightarrow R = \sqrt{1954} \approx 44{,}204$
- A háromszög területe: $T = 2027$
- Jelölje a háromszög alapját b, szárait a, a hozzá tartozó magasságot pedig h.

A körbe írt egyenlő szárú háromszög esetén a Thalész-tételből és a befogótételből ad
ismert összefüggés:

$$a^2 = 2R \cdot h$$

A háromszög területe az alap és a magasság szorzataként:

$$T = \frac{b \cdot h}{2} \Longrightarrow b = \frac{2T}{h} = \frac{4054}{h}$$

2. A magasság meghatározása (Negyedfokú egyenlet)

A Pitagorasz-tétel alapján a háromszög felére felírható:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Behelyettesítve a^2 és b kifejezéseit:

$$2Rh = h^2 + \left(\frac{2T}{2h}\right)^2$$

$$2Rh = h^2 + \frac{T^2}{h^2}$$

Átrendezve kapjuk a magasságra (h) vonatkozó negyedfokú polinomot:

$$h^4 - 2Rh^3 + T^2 = 0$$

$$h^4 - 2\sqrt{1954}\,h^3 + 2027^2 = 0$$

Az egyenlet numerikus megoldása két valós, pozitív magasságot ad, ami a körön belüli két lehetséges geometriai elhelyezkedésnek felel meg.

3. A két lehetséges eset és a kerületek

- **1. eset: Hegyesszögű háromszög** (a kör középpontja a háromszögön belül van)
  - Magasság: $h_1 \approx 80{,}55$
  - Alap: $b_1 = \frac{4054}{80{,}55} \approx 50{,}33$
  - Szár: $a_1 = \sqrt{2 \cdot \sqrt{1954} \cdot 80{,}55} \approx 84{,}39$
  - **Kerület:** $K_1 = 2a_1 + b_1 \approx \mathbf{219{,}10}$
- **2. eset: Tompaszögű háromszög** (a kör középpontja a háromszögön kívül van)
  - Magasság: $h_2 \approx 45{,}89$
  - Alap: $b_2 = \frac{4054}{45{,}89} \approx 88{,}34$
  - Szár: $a_2 = \sqrt{2 \cdot \sqrt{1954} \cdot 45{,}89} \approx 63{,}69$
  - **Kerület:** $K_2 = 2a_2 + b_2 \approx \mathbf{215{,}73}$

Végeredmény:
A háromszög kerülete a geometriai elhelyezkedéstől függően $\mathbf{219{,}10}$ vagy $\mathbf{215{,}73}$ egység.