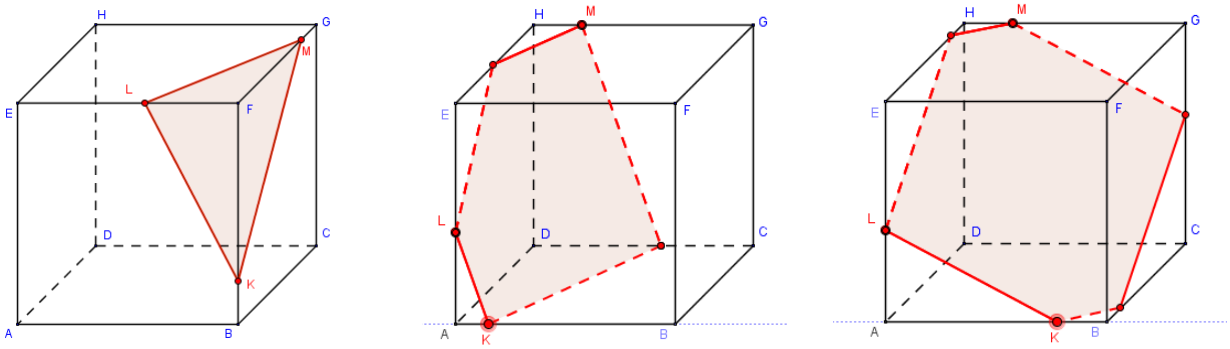
Rez kocky

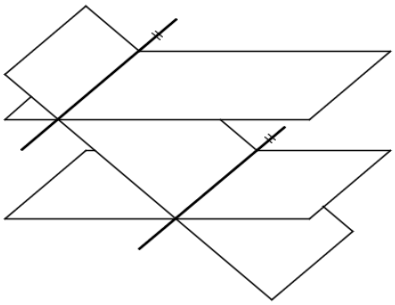
Rez kocky je prienik kocky a roviny. Rezom kocky je rovinný útvar. Môže to byť bod, úsečka alebo n-uholník, kde $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Hranica rezu kocky je vytvorená z úsečiek, ktoré vniknú ako prieniky roviny rezu so stenami kocky.



Popis obrázka: Body K, L, M sú určujúce body roviny rezu. V závislosti od umiestnenia týchto bodov je rezom kocky iný n-uholník. V našom prípade trojuholník, päťuholník a šesťuholník.

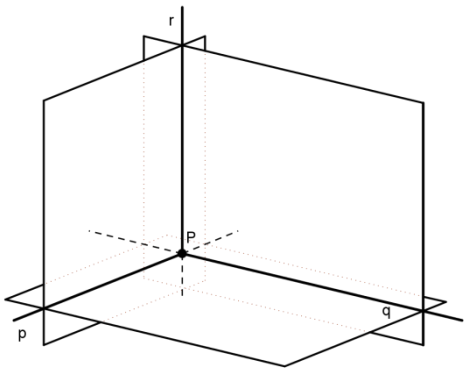
Pri zhotovovaní rezov kocky využívame nasledujúce tvrdenia.

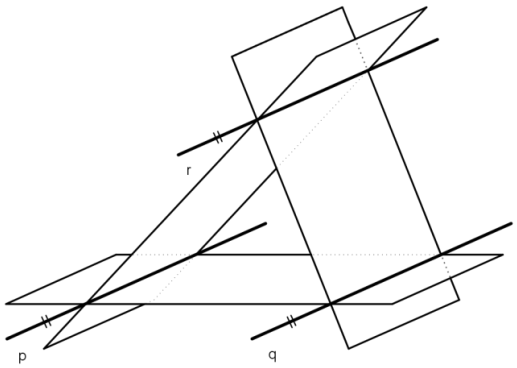
Veta 1: *Ak je rovina rôznobežná s jednou z dvoch rovnobežných rovín, tak je rôznobežná aj s druhou a pretína ich v dvoch rovnobežných priamkach.*



Veta 2: Nech každé dve z troch rovín sú rôznobežné.

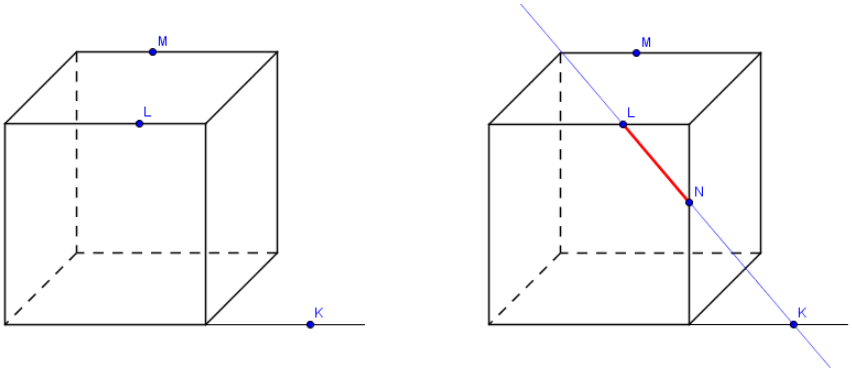
a) Ak dve z priesečníc prechádzajú jedným bodom, tak ním prechádza aj tretia priesečnica.
b) Ak dve z priesečníc nemajú spoločný bod, tak sú rovnobežné a s nimi je rovnobežná aj tretia priesečnica.





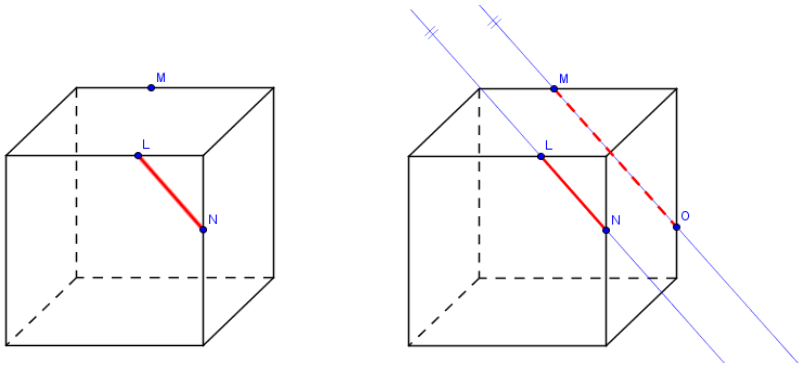
Ako postupovať pri zhotovení rezu kocky?

1. Ak nejaké 2 body určujúce rovinu rezu ležia v rovine určenej niektorou stenou kocky, môžeme tieto body spojiť. Vzniknutá priamka patrí rovine rezu a prienik priamky so stenou kocky (ak existuje) je hranicou rezu.



Popis obrázka: Body K, L, M sú body z roviny rezu. Body K, L patria rovine, preto priamka KL patrí rovine rezu. Súčasne táto priamka leží v rovine určenej prednou stenou kocky, preto prienik priamky KL a prednej steny kocky je už hranicou rezu, v tomto prípade úsečku LN.

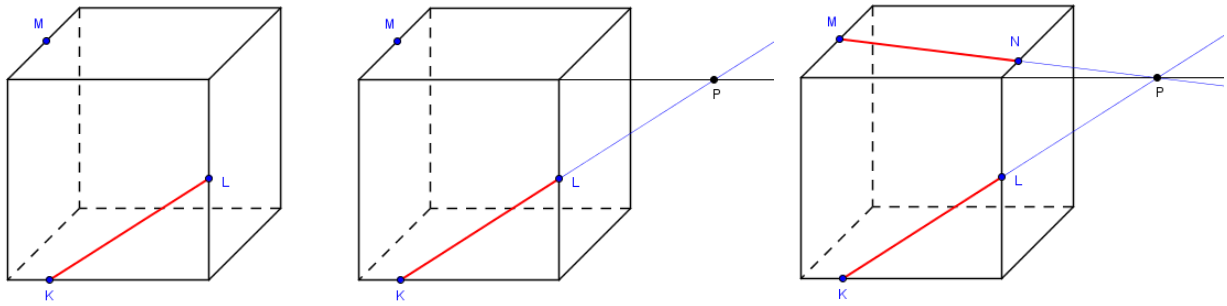
2. Využijeme skutočnosť, že v kocke existujú dvojice stien, ktoré ležia v rovnobežných rovinách. Ak v jednej rovine poznáme priamku, ktorá patrí rovine rezu, a v druhej rovine bod z roviny rezu, tak daným bodom môžeme viesť rovnobežku s priamkou prvej roviny (využívame vetu 1). Prienikom rovnobežnej priamky so stenou kocky, ktorá leží v druhej rovine je ďalšia hranica rezu kocky.



Popis obrázka: Body L, M, N sú body z roviny rezu. Úsečka LN je hranicou rezu v prednej stene kocky. Rovina prednej steny kocky a zadnej steny kocky sú rovnobežné, rovina rezu je s týmito rovinami rôznobežná a pretína ich v dvoch rovnobežkách. Preto bodom M, ktorý leží na zadnej stene kocky môžeme viesť rovnobežku s priamkou LN. Vzniknutá rovnobežka patrí rovine rezu aj rovine zadnej steny kocky, preto prienik tejto priamky so zadnou stenou kocky vytvára ďalšiu hranicu rezu. V našom prípade úsečku MO.

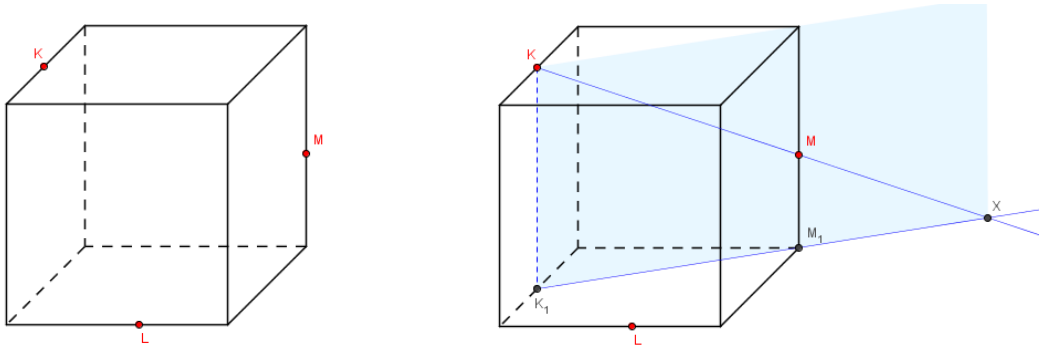
3. „Predlžovanie úsečky“, ktorá je hranicou rezu. Ak v niektorej stene poznáme hranicu rezu - úsečku, tak touto úsečkou môžeme preložiť priamku, ktorá nám pretne priamku, na ktorej leží hrana kocky patriaca príslušnej stene kocky. Samozrejme tento spoločný priesečník sa nachádzajú mimo kocky. Tento priesečník patrí zároveň trom rôznobežným rovinám a to rovine rezu a dvom rovinám, v ktorých ležia susedné steny kocky, tento priesečník je spoločným bodom

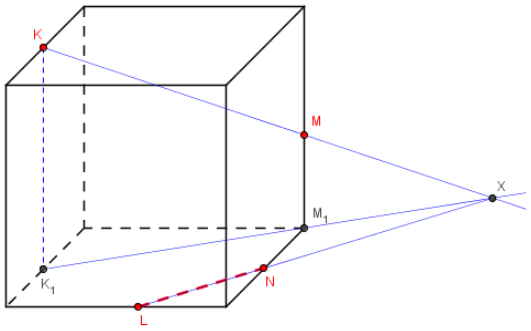
priesečníc týchto rovín (veta 2). Dôležité je, že priesečník je ďalším bodom patriacim rovine rezu a pre ďalšiu konštrukciu rezu vieme použiť postup z bodu 1.



Popis obrázka: Body K, L, M sú body z roviny rezu. Úsečka KL je hranicou rezu v prednej stene kocky. Rovina prednej steny kocky a hornej steny kocky sú rôznobežné a ich priesečnica je priamka, ktorá obsahuje prednú hornú stenu kocky. Bod P je priesečníkom troch rovín a to roviny prednej steny kocky, roviny hornej steny kocky a aj roviny rezu. Bod P môžeme spojiť s bodom M a prienik priamky PM s hornou stenou kocky vytvára ďalšiu hranicu rezu. V našom prípade úsečku MN.

4. Využitie pomocnej roviny (najčastejšie sa využíva vhodná rovina kolmá na rovinu podstavy). Pomocnú rovinu využijeme, ak žiadne dva body, ktoré určujú rovinu rezu neležia v jednej rovine, ktorá by bola určená niektorou stenou kocky. Spojením dvojice určujúcich bodov roviny rezu síce získame priamku patriacu rovine rezu, ale táto priamka nie je z povrchu kocky. Pomocnú rovinu preložíme dvojicou určujúcich bodov roviny rezu, z ktorých aspoň jeden neleží v rovine podstavy. Pomocná rovina, rovina rezu a rovina podstavy sú tri navzájom rôznobežné roviny, ktoré majú spoločný bod. Tento priesečník je ďalším bodom roviny rezu, a pre ďalšiu konštrukciu rezu vieme použiť postup z bodu 1.



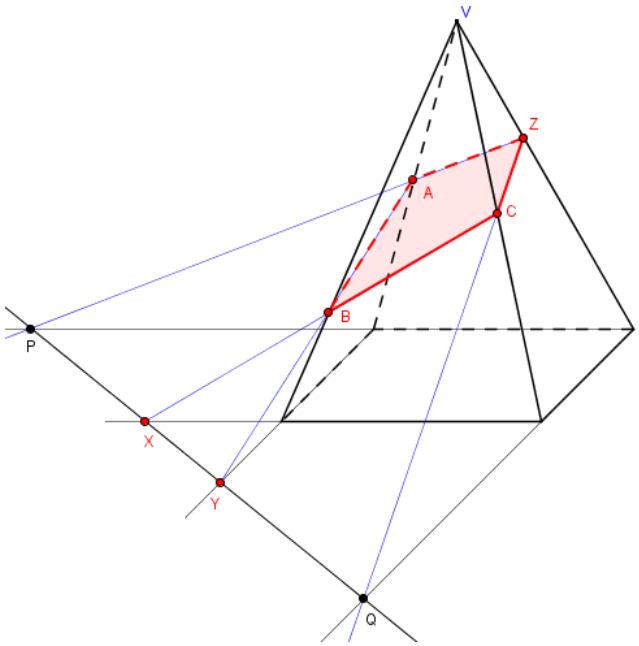


Popis obrázka: Body K, L, M sú body z roviny rezu. Žiadna dvojica týchto bodov neleží v rovine, ktorú by určovala niektorá stena kocky. Bodmi K, M preložíme pomocnú rovinu kolmú na rovinu podstavy. Body K_1, M_1 sú kolmé priemety bodov K, M do roviny podstavy. Bod X je priesečníkom priamok KM a K_1M_1, leží v rovine rezu aj v rovine podstavy. Bod L je z roviny podstavy aj z roviny rezu, preto priamka LX patrí rovine rezu a jej prienik s dolnou stenou kocky vytvára ďalšiu hranicu rezu. V našom prípade úsečku LN.

Rez ihlana

Rez ihlana je prienik ihlana a roviny. Rezom ihlana je rovinný útvar. Môže to byť bod, úsečka alebo mnohouholník.

Pri reze ihlana postupujeme obdobne ako pri rezoch kocky, akurát ihlan nemá žiadne dve svoje steny rovnobežné, preto nemôžeme použiť postup z bodu 2. Významnú úlohu pri rezoch ihlana zohráva priesečnica roviny rezu a roviny podstavy.



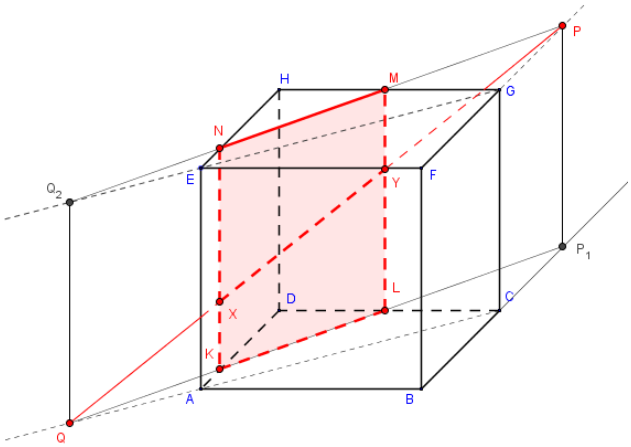
Popis obrázka: Body X, Y, Z sú určujúce body roviny rezu. Body X, Y ležia v rovine rezu aj v rovine podstavy. Priamka XY je priesečnicou roviny rezu a roviny podstavy. Bod P aj bod Q je spoločným bodom roviny určenej jednou bočnou stenou, roviny podstavy a roviny rezu.

Prienik priamky a telesa

Prienikom priamky a telesa môže byť prázdna množina, bod alebo úsečka. Pri zhotovovaní prieniku priamky s telesom potrebujeme určiť také body priamky, ktoré patria povrchu telesa, to znamená spoločné body priamky a stien telesa.

Postup:

1) Zadanou priamkou preložíme vhodnú rovinu.
2) Zhotovíme rez telesa danou rovinou.
3) Určíme spoločné body priamky a rezu(ak existujú), čo je vlastne prienik priamky a telesa. Spoločné body priamky a hranice rezu telesa sú koncové body úsečky, ktorá tvorí prienik priamky a telesa.



Popis obrázka: Úlohou je určiť prienik priamky PQ s kockou. Bod P leží na polpriamke FG a bod Q leží na polpriamke CA. V tomto prípade bola priamkou PQ preložená rovina kolmá na rovinu podstavy kocky. Rezom je obdĺžnik KLMN. Body X, Y sú body priamky a súčasne patria povrchu telesa, t.j. úsečka XY je prienikom priamky PQ s kockou.