

Akte 02: Der Fall der mysteriösen Wurzel

$$\sqrt{2}$$

Ist √2 eine 'normale' Zahl? Eine Spurensuche.

NotebookLM

Unser Ermittler-Trick: Der Widerspruchsbeweis



Um einen Fall zu lösen, tun wir manchmal so, als wäre der Verdächtige schuldig.



Dann suchen wir nach Beweisen.

Wenn die Beweise zu einem unlösbaren Widerspruch führen...



(z.B. 'Der Verdächtige war an zwei Orten gleichzeitig'), muss unsere ursprüngliche Annahme falsch sein.



Der Verdächtige ist also unschuldig!

NotebookLM

Die Annahme: $\sqrt{2}$ ist eine ganz normale Bruchzahl



Wir nehmen an, man kann $\sqrt{2}$ als Bruch schreiben.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$



Dieser Bruch ist **vollständig gekürzt**. Das bedeutet, a und b haben keine gemeinsamen Teiler. Sie können also nicht beide gerade sein.

NotebookLM

Spur Nr. 1: Wir nehmen den Bruch unter die Lupe

↓

Wir quadrieren beide Seiten der Gleichung.

$$(\sqrt{2})^2 = (a / b)^2$$

↓

Das führt uns zu:

$$2 = a^2 / b^2$$

↓

Umgeformt heißt das:

$$\mathbf{a^2 = 2 * b^2}$$

→ Das bedeutet: `a²` muss eine **gerade Zahl** sein.



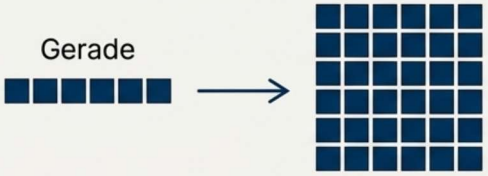
NotebookLM

Spur Nr. 2: Was wir über gerade Zahlen wissen

Eine wichtige Regel: Das Quadrat einer Zahl **ist nur dann gerade, wenn die Zahl selbst** auch gerade ist.

Gerade

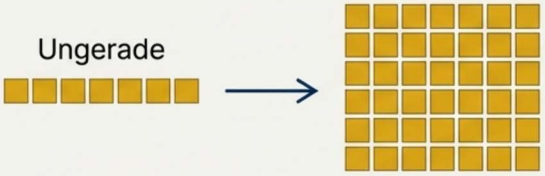
Gerade



$6^2 = 36$ (gerade → gerade)

Ungerade

Ungerade



$7^2 = 49$ (ungerade → ungerade)

Da wir wissen, dass a^2 gerade ist, muss also auch **a eine gerade Zahl** sein.

2

NotebookLM

Spur Nr. 3: Die Ermittlung geht weiter

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Wenn a eine gerade Zahl ist, können wir sie als $2 * k$ schreiben (wobei k irgendeine ganze Zahl ist).

$$a = 2k$$

↓

Das setzen wir jetzt in unsere Gleichung $a^2 = 2b^2$ ein:

$$(2k)^2 = 2b^2 \rightarrow 4k^2 = 2b^2$$

↓

Wir teilen durch 2 und finden heraus:

↓

$$2k^2 = b^2$$ → Das bedeutet: b^2 muss auch eine **gerade Zahl** sein!



NotebookLM

Der Widerspruch! Hier stimmt etwas nicht.

Unsere Annahme

Der Bruch **a / b** ist **vollständig gekürzt**.

a und **b** können nicht beide gerade sein.



Unsere Beweise

Spur 2 hat gezeigt: **a ist gerade**.

Spur 3 hat gezeigt: **b ist gerade**.

*Moment mal... Das kann nicht beides **gleichzeitig** wahr sein!*

NotebookLM

Das Urteil: Fall gelöst



Unsere Annahme, dass man $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzten Bruch schreiben kann, hat zu einem unlösbaren Widerspruch geführt.

Die Annahme war also **falsch**.

~~$\sqrt{2} = a/b$~~

✓ $\sqrt{2} \neq a/b$ Wurzel 2 ist irrational.

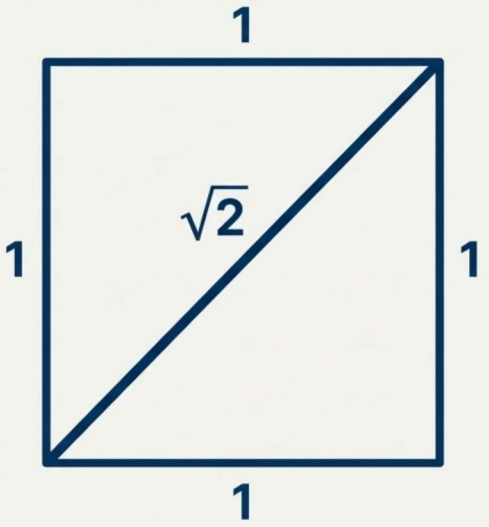
NotebookLM

Was bedeutet das eigentlich?

Irrationale Zahlen wie $\sqrt{2}$ sind keine seltsamen Ausnahmen. Sie sind überall!

Die Diagonale eines einfachen Quadrats mit der Seitenlänge 1 ist genau $\sqrt{2}$ lang.

Man kann diese Länge zeichnen, aber man kann sie niemals perfekt als Bruchzahl aufschreiben. Manche Zahlen haben eben unendlich viele, nicht-periodische Nachkommastellen.
Willkommen in der Welt der reellen Zahlen!



NotebookLM