ELECTROMAGNETISMO - **CAPÍTULO 4 – Campos electrostáticos**

Repasar:
- Carga eléctrica y sus propiedades
- Procesos de electrización

Temas:
- Fuerza eléctrica
- Campo eléctrico
- Campo eléctrico de distribuciones continuas de cargas

Ley de Coulomb e intensidad de campo

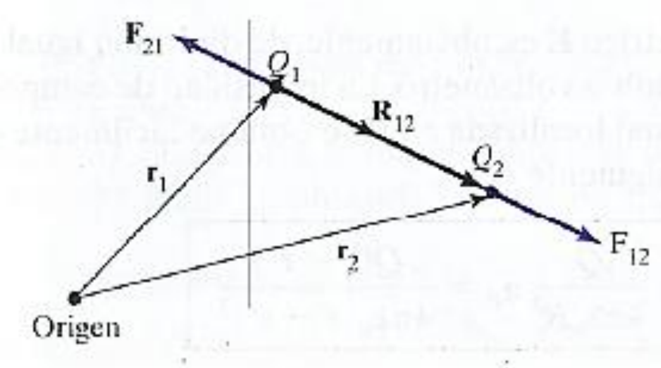
Fuerza eléctrica (ecuación de Coulomb-1785)
Interacción entre cargas puntuales. Carga del electrón e=-1,6.10^{-19} C.

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_{R_{12}}}$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$R = |\mathbf{R}_{12}|$$

$$\mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{\mathbf{R}_{12}}{R}$$



Si se tienen más de dos cargas puntuales, es posible usar el *principio de superposición* para determinar la fuerza sobre una carga particular. Este principio establece que si N cargas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$ se ubican respectivamente en puntos con vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$, la fuerza resultante $\mathbf{F}$ sobre una carga Q localizada en el punto $\mathbf{r}$ es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre Q por cada una de las cargas $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$. En consecuencia:

$$\mathbf{F} = \frac{QQ_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{QQ_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \cdots + \frac{QQ_N(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r} - \mathbf{r}_N|^3}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}}$$

Campo Eléctrico (E)

$$\mathbf{E} = \lim_{Q\to 0} \frac{\mathbf{F}}{Q}$$

Campo eléctrico en un punto del espacio debido a una carga puntual Q

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R = \frac{Q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}$$

Para n cargas puntuales, vale el principio de superposición:

$$\mathbf{E} = \frac{Q_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3} + \frac{Q_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3} + \cdots + \frac{Q_N(\mathbf{r}-\mathbf{r}_N)}{4\pi\varepsilon_o|\mathbf{r}-\mathbf{r}_N|^3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{N}\frac{Q_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|^3}$$

Copiar ejemplos 4.1, 4.2 y 4.3 del texto Elementos de Electromagnetismo de Sadiku.
También se recomienda repasar los ejemplos propuestos en los libros utilizados en cursos previos, como Física 2 de Sears & Zemansky o Física tomo II de Tipler.

Campos eléctricos debidos a distribuciones continuas de carga

Se acostumbra denotar la densidad de carga lineal o carga de línea, la densidad de carga superficial y la densidad de carga volumétrica con ρ_L (en C/m), ρ_S (en C/m^2) y ρ_v (en C/m^3), respectivamente. Estos símbolos no deben confundirse con el de ρ (sin subíndice), el cual designa la distancia radial en coordenadas cilíndricas.

$$dQ = \rho_L\,dl \to Q = \int_L \rho_L\,dl \qquad \text{(carga de línea)}$$

$$dQ = \rho_S\,dS \to Q = \int_S \rho_S\,dS \qquad \text{(carga superficial)}$$

$$dQ = \rho_v\,dv \to Q = \int_v \rho_v\,dv \qquad \text{(carga volumétrica)}$$

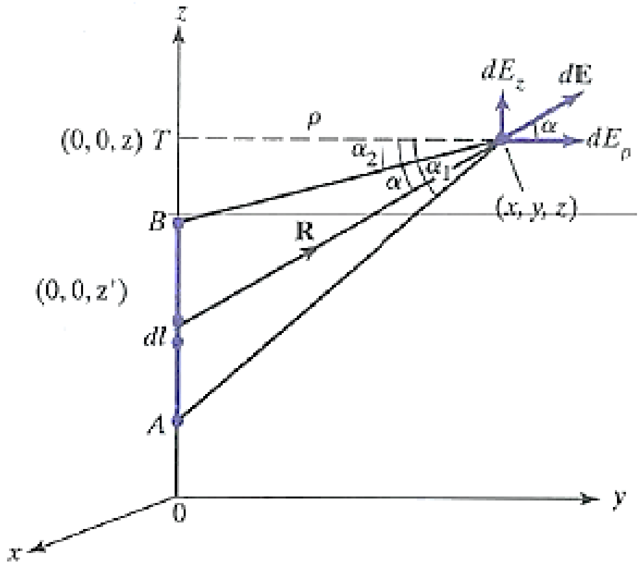
$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L\,dl}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R \qquad \text{(carga de línea)}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S\,dS}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R \qquad \text{(carga superficial)}$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v\,dv}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R \qquad \text{(carga volumétrica)}$$

Analizaremos los casos más comunes: **carga de línea, carga superficial, carga volumétrica.**
Se recomienda revisar otros ejemplos en los textos utilizados en los cursos anteriores de Física.

A. Carga de línea



$$dQ = \rho_L\, dl = \rho_L\, dz$$

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L\, dz$$

$$dl = dz'$$

$$\mathbf{R} = (x, y, z) - (0, 0, z') = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

En cilíndricas:

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Sustituyendo en la ecuación de Campo eléctrico para línea de carga:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\, dz'$$

Por trigonometría:

$$R = [\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2} = \rho \sec\alpha$$

$$z' = OT - \rho\tan\alpha, \quad dz' = -\rho\sec^2\alpha\, d\alpha$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho\sec^2\alpha\,[\cos\alpha\,\mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{a}_z]\, d\alpha}{\rho^2\sec^2\alpha}$$

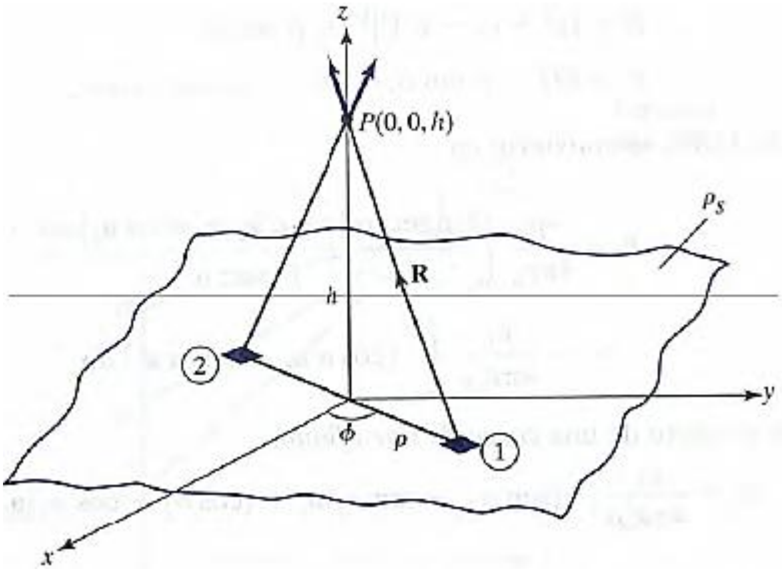
$$= -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos\alpha\,\mathbf{a}_\rho + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{a}_z]\, d\alpha$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0\rho}\,[-(\operatorname{sen}\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1)\mathbf{a}_\rho + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\mathbf{a}_z]$$

En el caso particular de una *línea infinita cargada*, A= (0,0,-∞), B=(0,0,∞), $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/2$, entonces la ecuación es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\mathbf{a}_\rho}$$

B. Carga superficial



$$dQ = \rho_S \, dS$$

$\mathbf{E}$ en el punto $P(0,0,h)$

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z$$

$$R = |\mathbf{R}| = [\rho^2 + h^2]^{1/2}$$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$dQ = \rho_S \, dS = \rho_S \, \rho \, d\phi \, d\rho$$

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S \, \rho \, d\phi \, d\rho \, [-\rho\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z]}{4\pi\varepsilon_o[\rho^2 + h^2]^{3/2}}$$

A causa de la simetría de la distribución de carga, para cada elemento 1 hay un correspondiente elemento 2 cuya contribución a lo largo de $\mathbf{a}_\rho$ anula la del elemento 1

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\infty}\frac{h\rho \, d\rho \, d\phi}{[\rho^2 + h^2]^{3/2}}\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_o}2\pi\int_0^{\infty}[\rho^2 + h^2]^{-3/2}\frac{1}{2}d(\rho^2)\,\mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o}\left\{-[\rho^2 + h^2]^{-1/2}\right\}_0^{\infty}\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_z$$

Para el caso de placa infinita cargada:

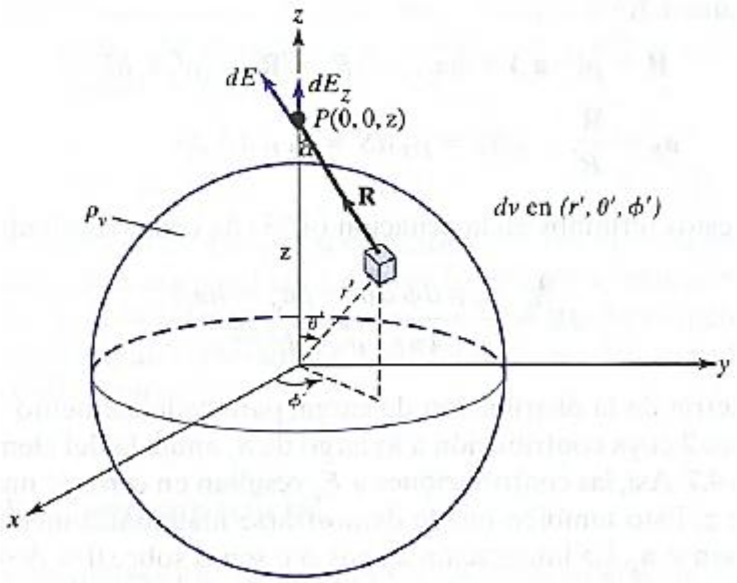
$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_n}$$

Donde $\mathbf{a}_n$ es un vector unitario normal a la placa.

En un *capacitor de placas paralelas*, el campo eléctrico existente entre las dos placas con cargas igual y opuesta está dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_n + \frac{-\rho_S}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_n) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_o}\mathbf{a}_n$$

C. Carga volumétrica



$$dQ = \rho_v \, dv$$

La carga total en la esfera de radio a es:

$$Q = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv$$

$$= \rho_v \frac{4\pi a^3}{3}$$

En el punto P (0,0, z):

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R$$

$$\mathbf{a}_R = \cos\alpha \, \mathbf{a}_z + \operatorname{sen}\alpha \, \mathbf{a}_\rho$$

Por simetría, las contribuciones de E_x y E_y resultan ser cero.

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = \int dE \cos\alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dv \cos\alpha}{R^2}$$

$$dv = r'^2 \operatorname{sen}\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\phi'$$

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR}$$

$$\cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'} \rightarrow \operatorname{sen}\theta' \, d\theta' = \frac{R\,dR}{zr'}$$

Sustituyendo:

$$E_z = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R\,dR}{zr'} dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \frac{1}{R^2}$$

$$= \frac{\rho_v 2\pi}{8\pi\varepsilon_0 z^2} \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2} \right] dR \, dr'$$

$$= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \int_0^a r' \left[R - \frac{(z^2 - r'^2)}{R} \right]_{z-r'}^{z+r'} dr'$$

$$= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \int_0^a 4r'^2 \, dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{z^2} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_v \right) \rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \mathbf{a}_z$$

Para un punto P (r, θ, ϕ): $\mathbf{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$, idéntico al campo eléctrico de una carga puntual ubicada en el centro de la distribución esférica de carga.

Copiar los ejemplos 4.4, 4.5 y 4.6

También se recomienda revisar estos temas en los libros utilizados en los cursos introductorios de Física.