EXAMEN PAU 2026. MATEMÁTICAS II

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

1.1 (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?

Sucesos:

VP = vuelos puntuales.

VR<3= vuelos con retrasos de hasta 3 horas.

VR>3 = vuelos con retrasos de más de 3 horas.

B = condiciones meteorológicas buenas. P(B)=0.9

P(VP/B) = 0.70

P(VR<3/B) = 0.20

P(VR>3 /B) = 0.10

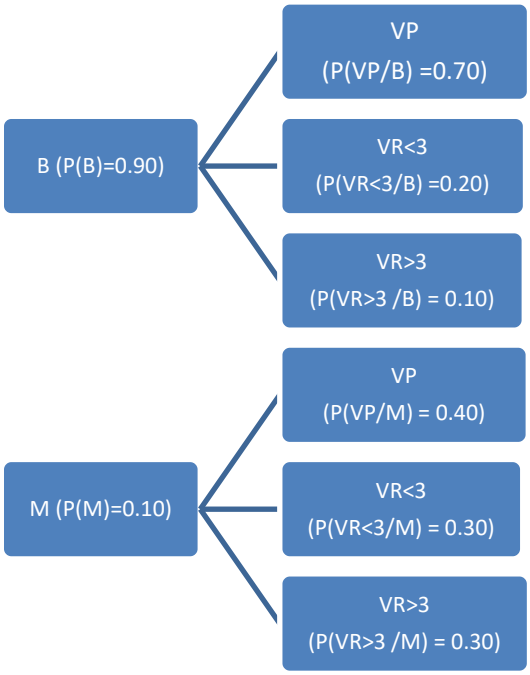
M = condiciones meteorológicas malas. P(M)=0.10

P(VP/M) = 0.40

P(VR<3/M) = 0.30

P(VR>3 /M) = 0.30

Ahora vamos a plasmar la información en diagrama de árbol.



$$P(VR > 3) = P(B) \cdot \mathrm{P(VR > 3\ /B)} + \mathrm{P(M)} \cdot \mathrm{P(VR > 3\ /M)} = 0.90 \cdot 0.10 + 0.10 \cdot 0.30 = 0.12$$

1.2 **(1 punto)** Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?

$$P(M/VP) = \frac{P(M \cap VP)}{P(VP)} = \frac{P(M) \cdot (VP/M)}{P(B) \cdot P(VP/B) + P(M) \cdot P(VP/M)} = \frac{0.10 \cdot 0.40}{0.90 \cdot 0.70 + 0.10 \cdot 0.40} = 0.0597$$

1.3 **(1 punto)** Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

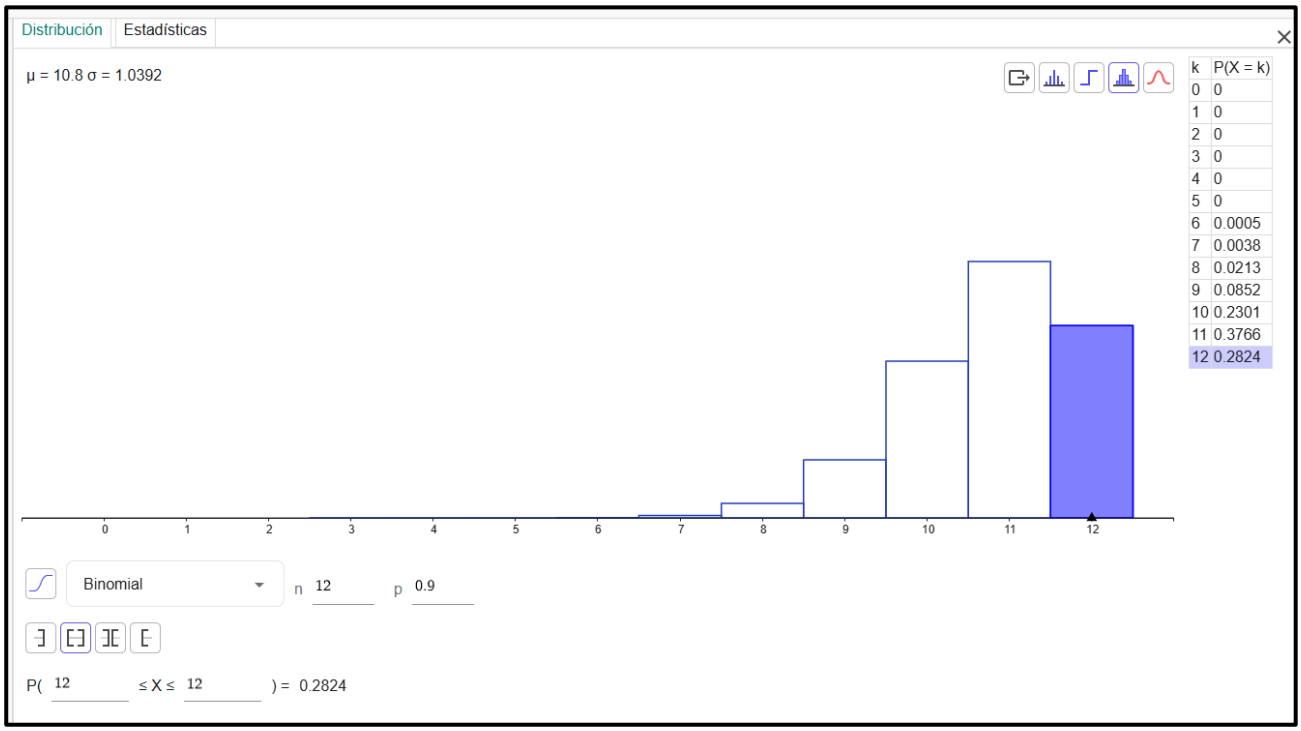
X = número de vuelos que enlacen con el vuelo a su destino final.

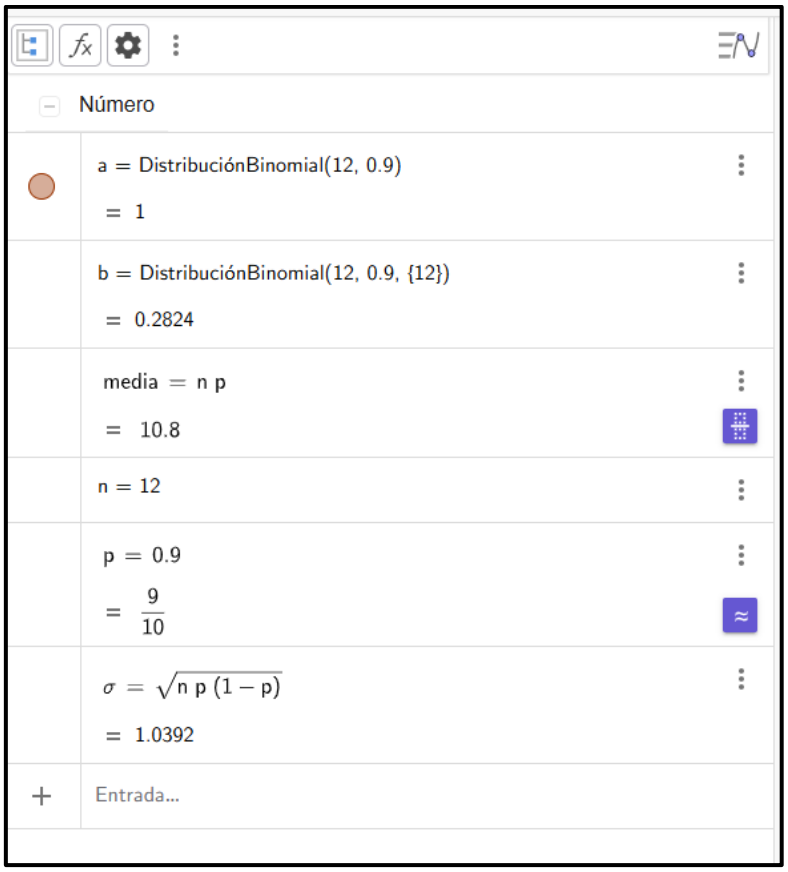
$$\boldsymbol{p = P(VP/B) + P(VR < 3/B) = 0.7 + 0.2 = 0.90}$$

$\boldsymbol{X \approx}$ **B(n=12,p=0.90)**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \rightarrow P(X = 12) = \binom{12}{12} 0.90^{12} \cdot (1 - 0.20)^{12-12} = 0.2824$$

https://www.geogebra.org/classic/rxbnhpmb


Distribución
Estadísticas
μ = 10.8 σ = 1.0392
k P(X = k)
0 0
1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0.0005
7 0.0038
8 0.0213
9 0.0852
10 0.2301
11 0.3766
12 0.2824
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
Binomial
n 12
p 0.9
P(12 ≤ X ≤ 12) = 0.2824


Número
a = DistribuciónBinomial(12, 0.9)
= 1
b = DistribuciónBinomial(12, 0.9, {12})
= 0.2824
media = n p
= 10.8
n = 12
p = 0.9
= 9/10
σ = √(n p (1 − p))
= 1.0392
Entrada...

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

2.1. Una empresa de ingeniería estructural está diseñando un sistema de soporte para un edificio que depende de un parámetro m relacionado con la resistencia de los materiales empleados. Para garantizar la estabilidad de la estructura, es necesario analizar una matriz que representa las relaciones entre fuerzas internas y externas en los puntos de unión de la estructura.

Para este análisis, se considera la siguiente matriz de rigidez:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Así mismo, se cuenta con un vector de cargas externas y un vector de desplazamientos iniciales:

$$\boldsymbol{E} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{3}) \; \boldsymbol{y} \; \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

La estabilidad y respuesta de la estructura dependen de las propiedades de la matriz D y de su relación con los vectores E y F. Se pide

2.1.1 (0.5 puntos) Determinar para qué valores de m la matriz D es invertible, es decir, cuándo la estructura es estable.

Una matriz es invertible si $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = (\mathbf{0} - \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}} + \mathbf{0}) - (\mathbf{0} + \mathbf{1} + \mathbf{0}) = -\boldsymbol{m}^{\mathbf{2}} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{m}^{\mathbf{2}} = \mathbf{-1} \rightarrow \boldsymbol{m} = \pm\sqrt{\mathbf{-1}}$$

Por tanto, no hay valores que anulen el determinante de la matriz D, $\exists D^{-1}, \forall m \in R$

Nota: En GeoGebra se puede introducir una matriz con parámetro, pero se debe de utilizar x como parámetro.

Dos formas distintas

A={{1,0,m},{m,0,-1},{2,-1,1}}	Mediante la hoja de cálculo. 1) Los elementos se introducen en las celdas. 2) se seleccionan los elementos y se pulsa botón derecho de ratón → Crear matriz

https://www.geogebra.org/classic/wvbzgfwk

2.1.2 (0.5 puntos) Si la estabilidad del sistema dependería de que la matriz D^2 fuera invertible, explica razonadamente si hay algún valor de m que ponga en riesgo la estabilidad del sistema sin necesidad de resolver toda ecuación matricial.

$$\left|\boldsymbol{D^2}\right| = |D| \cdot |D| = (-\boldsymbol{m^2} - \boldsymbol{1}) \cdot (-\boldsymbol{m^2} - \boldsymbol{1}) = (\boldsymbol{m^2} + \boldsymbol{1})^2 = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{m^2} + \boldsymbol{1} = \boldsymbol{0} \rightarrow \boldsymbol{m^2} = -\boldsymbol{1} \rightarrow \boldsymbol{m} = \pm\sqrt{-\boldsymbol{1}}$$

Por tanto, no hay valores que anulen el determinante de la matriz D^2, $\exists (D^2)^{-1}, \forall m \in R$

2.1.3 (0.5 puntos) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

$$E \cdot F = (\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{4} \quad \boldsymbol{3}) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ -\boldsymbol{1} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{6})$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} \\ -\boldsymbol{1} \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{4} \quad \boldsymbol{3}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{6} \\ -\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{4} & -\boldsymbol{3} \end{pmatrix}$$

$$(FE)^t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{6} \\ -\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{4} & -\boldsymbol{3} \end{pmatrix}^{\boldsymbol{t}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & -\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{8} & -\boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{6} & -\boldsymbol{3} \end{pmatrix}$$

2.1.4 (1 punto) Resolver, para m=0, la ecuación matricial con incógnita X:

$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D^{-1}}$$

$$\boldsymbol{D(0)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj(D)^t)$$

$$Adj(D) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{0} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ 2 & -\boldsymbol{1} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & 0 \\ \boldsymbol{0} & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}(Adj(A)^t) = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2} & -\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D(0)^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2} & -\boldsymbol{1} & -\boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}X+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$X=2\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\-2&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\4&-2&0\\-4&0&-2\end{pmatrix}$$

https://www.geogebra.org/classic/wvbzgfwk

2.2 Dada $A=\begin{pmatrix}1&-1&m+1\\0&1&m\\m-1&0&5\end{pmatrix}$ $y\ b=\begin{pmatrix}3\\3\\3m\end{pmatrix}$

2.2.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones $Ax=b$ en función del parámetro m.

$$Ax=b\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&m+1\\0&1&m\\m-1&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\3m\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x-y+(m+1)z=3\\y+mz=3\\(m-1)x+5z=3m\end{cases}$$

Para discutir el sistema debemos de emplear el T. Rouché-Frobenius, para ello debemos de estudiar el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&m+1\\0&1&m\\m-1&0&5\end{pmatrix}\qquad A*=\begin{pmatrix}1&-1&m+1&\vdots 3\\0&1&m&\vdots 3\\m-1&0&5&\vdots 3m\end{pmatrix}$$

Para estudiar el rg(A) debemos calcular el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&m+1\\0&1&m\\m-1&0&5\end{vmatrix}=(5-m^2+m)-(m^2-1+0+0)=0\rightarrow-2m^2+m+6=0$$

$$\mathrm{m}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot6}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-4}=\frac{-1\pm7}{-4}=\begin{matrix}m_1=\frac{-8}{-4}=2\\m_2=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}\end{matrix}$$

Caso 1: ($m \neq 2$ y $m \neq -3/2$)

Si $m \neq 2$ y $m \neq -3/2$ → rg(A) = 3 = rg(A*) = número de incógnitas → SCD.

Nota: el rg(A*) = 3 puesto que A' es una matriz 3x4 y su rango es 3 cómo máximo, y puesto que una de las matrices de la ampliada es A entonces su rango coincide con esta.

Caso 2: ($m = 2$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & 5 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

Puesto que $|A| = 0 \rightarrow rg(A) = 2$ (puesto que existe una matrix 2x2 con determinante distinto de 0)

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Ahora estudiamos el determinante de A*

$$A* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 0 & 5 & \vdots & 6 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si existe una matriz 3x3 cuyo determinante es diferente de cero.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Y, por tanto: rg(A) = 2 rg(A') = 2 < número de incógnitas → Sistema compatible indeterminado

Caso 2: ($m = -3/2$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & \vdots 3 \\ 1 & 0 & 5 & \vdots -9/2 \end{pmatrix}$$

Puesto que $|A| = 0 \rightarrow rg(A) = 2$ (puesto que existe una matriz 2x2 con determinante distinto de 0)

$|1| = 1 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Ahora estudiamos el determinante de A*

$$A* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & \vdots 3 \\ 1 & 0 & 5 & \vdots -9/2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos si existe una matriz 3x3 cuyo determinante es diferente de cero.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -9/2 \end{vmatrix} = \frac{-21}{2} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -1 & -1/2 & 3 \\ 1 & -3/2 & 3 \\ 0 & 5 & -9/2 \end{vmatrix} = 21$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & -1/2 & 3 \\ 1 & -3/2 & 3 \\ 0 & 5 & -9/2 \end{vmatrix} = 0$$

Y, por tanto: rg(A) = rg(A') = 3 → Sistema Compatible Determinado

Conclusión:

Si $m \neq \mathbf{2}\ \boldsymbol{y}\ m \neq -\mathbf{3/2}$→ rg(A) = 3 = rg(A') = número de incógnitas → Sistema Comp. Det.

Si $m = \mathbf{2}$ → rg(A) = 2 rg(A') = 2 < número de incógnitas → Sistema Com. Ind.

Si $m = -\mathbf{3/2}$ → rg(A) = 2 rg(A') = 3 → Sistema Incompatible

https://www.geogebra.org/classic/sgfbeqrc

2.2.2 (0.75 puntos) Calcular, si existe, la solución para m=0.

Sustituimos m por 0, y resolvemos por Gauss o por Cramer:

$$\begin{cases} x-y+(m+1)z=3 \\ y+mz=3 \\ (m-1)x+5z=3m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+z=3 \\ y=3 \\ -x+5z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots 3 \\ -1 & 0 & 5 & \vdots 0 \end{pmatrix}_{F3+F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots 3 \\ 0 & -1 & 6 & \vdots 3 \end{pmatrix}_{F3\ +\ F2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots 3 \\ 0 & 0 & 6 & \vdots 6 \end{pmatrix}$$

Y ahora resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x-y+z=3 \\ y=3 \\ 6z=6 \end{cases}$$

$$z=1 \rightarrow y=3 \rightarrow x-3+1=3 \rightarrow x=5$$

Solución: $(x,y,z)=(5,3,1)$

2.2.3 (0.75 puntos) Halla la solución en el caso en que el sistema tenga infinitas soluciones.

Cuando m=2, y resolvemos por Gauss o por Cramer:

$$\begin{cases} x-y+(m+1)z=3 \\ y+mz=3 \\ (m-1)x+5z=3m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y+3z=3 \\ y+2z=3 \\ x+5z=6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 1 & 0 & 5 & \vdots 6 \end{pmatrix}_{F3-F1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots 3 \end{pmatrix}_{F3\ -\ F2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & \vdots 3 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots 3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos como $z=\lambda$, y sustituimos en el sistema:

$$y+2\lambda=3 \rightarrow y=3-2\lambda$$

$$x-y+3\lambda=3 \rightarrow x=3+y\text{-}3\lambda \rightarrow x=3+3-2\lambda\text{-}3\lambda=6\text{-}5\lambda$$

Solución: $(x,y,z)=(6-5\lambda,3-2\lambda,\lambda)\ \lambda \in R$

https://www.geogebra.org/classic/sgfbeqrc

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

3.1 Se consideran los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a-1)x - ay - z = a$ donde a representa un parámetro real. Se pide:

3.1.1 (1,5 puntos) Analizar en función de a la posición relativa de los dos planos.

$\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$

$\pi_2: (a-1)x - ay - z = a$

Paso 1: Formamos la matriz M, y la matriz M*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -a^2 & -a \\ a-1 & -a & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -a^2 & -a & a-1 \\ a-1 & -a & -1 & a \end{pmatrix}$$

Paso 2: Estudiamos el rango de M

Construimos las tres posibles matrices 2x2:

$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -a^2 \\ a-1 & -a \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ a-1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -a^2 & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}$,

Y ahora estudiamos su determinante:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -a^2 \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = -2a-(-a^2)\cdot(a-1) = -2a + a^3 - a^2 = a\cdot(a^2-a-2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = 2 \\ a = -1 \end{matrix}$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ a-1 & -1 \end{vmatrix} = -2-(-a)\cdot(a-1) = -2-(-a^2+a) = a^2-a-2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ a = -1 \end{matrix}$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} -a^2 & -a \\ -a & -1 \end{vmatrix} = a^2-(-a)\cdot(-a) = a^2-a^2 = 0$$

Conclusión:

Si $a = 2$ o $a = -1 \rightarrow rg(M) = 1$

Si $a \neq 2$ y $a \neq -1 \rightarrow rg(M) = 2$

Ahora estudiamos el rango de M*

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -a^2 \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = -2a-(-a^2)\cdot(a-1) = -2a + a^3-a^2 = a\cdot(a^2-a-2) = 0 \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = 2 \\ a = -1 \end{matrix}$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & -a \\ a-1 & -1 \end{vmatrix} = -2-(-a)\cdot(a-1) = -2-(-a^2+a) = a^2-a-2 = 0 \rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ a = -1 \end{matrix}$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} -a^2 & -a \\ -a & -1 \end{vmatrix} = a^2-(-a)\cdot(-a) = a^2-a^2 = 0$$

$$|M_4| = \begin{vmatrix} 2 & a-1 \\ a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2+4a-1 = 0 \rightarrow \text{no tienes soluciones reales}$$

$$|M_5| = \begin{vmatrix} -a^2 & a-1 \\ -a & a \end{vmatrix} = -a\cdot(a^2-a+1) = 0 \rightarrow \text{no tiene soluciones reales}$$

$$|M_6| = \begin{vmatrix} a & a-1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a^2+a-1 = 0 \rightarrow \text{no tines soluciones reales}$$

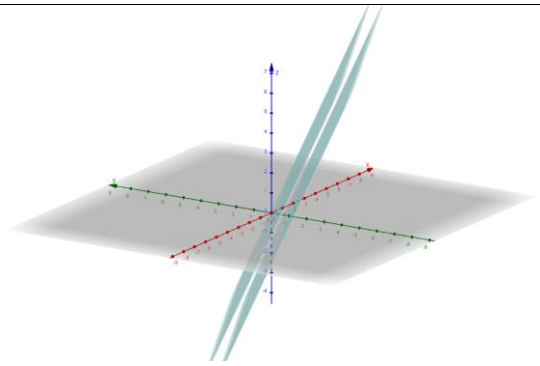
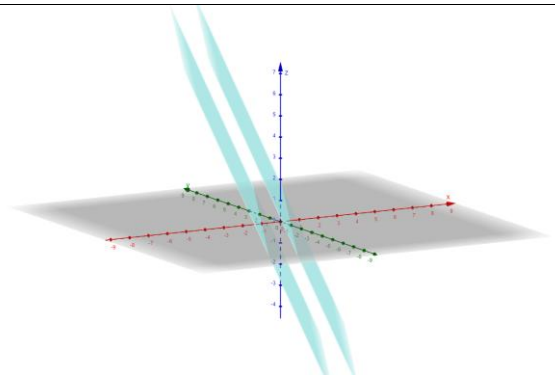
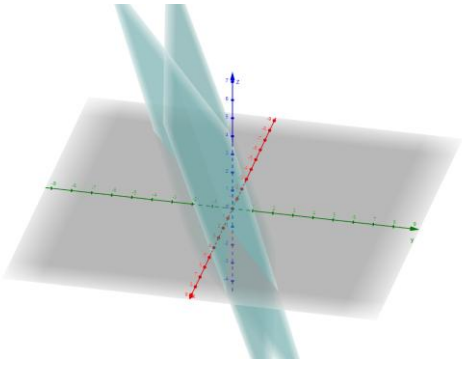
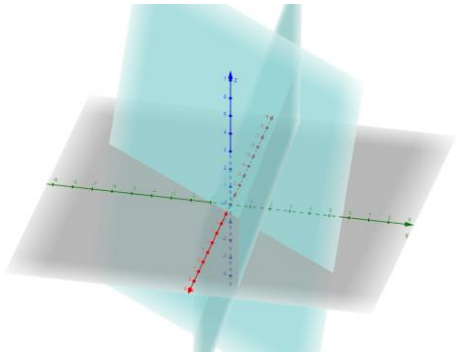
Conclusión:

$rg(M^*) = 2\ \forall a \in R$

Solución:

Si $a = 2$ o $a = -1 \rightarrow rg(M) = 1 \neq rg(M^*) = 2 \rightarrow \pi_1$ y π_1 son paralelos

Si $a \neq 2$ y $a \neq -1 \rightarrow rg(M) = 2 = rg(M^*) \rightarrow \pi_1$ y π_1 se cortan en una recta

a = 2	a = -1
	
a=3	a=-3
	

3.1.2 (0,5 puntos) Calcular, para a = 0, el ángulo entre los dos planos.

$\pi_1: 2x = -1 \rightarrow \vec{n}_{\pi_1} = (2,0,0)$

$\pi_2: -x - z = 0 \rightarrow \vec{n}_{\pi_2} = (-1,0,-1)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}}\right) = \frac{\left|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}\right|}{\left|\vec{n}_{\pi_1}\right| \cdot \left|\vec{n}_{\pi_2}\right|} = \frac{|(2,0,0) \cdot (-1,0,-1)|}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \widehat{\vec{n}_{\pi_1}, \vec{n}_{\pi_2}} = 45^o$$

3.1.3 (0,5 puntos) Calcular, para a = 0, la distancia entre el punto $\boldsymbol{P = (1,0,-1)}$ y el plano π_1

$\pi_1: 2x = -1$

$P = (1,0,-1)$

$$d(P,\pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{(2)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3}{2}\text{u}$$

https://www.geogebra.org/classic/wxgq4hjf

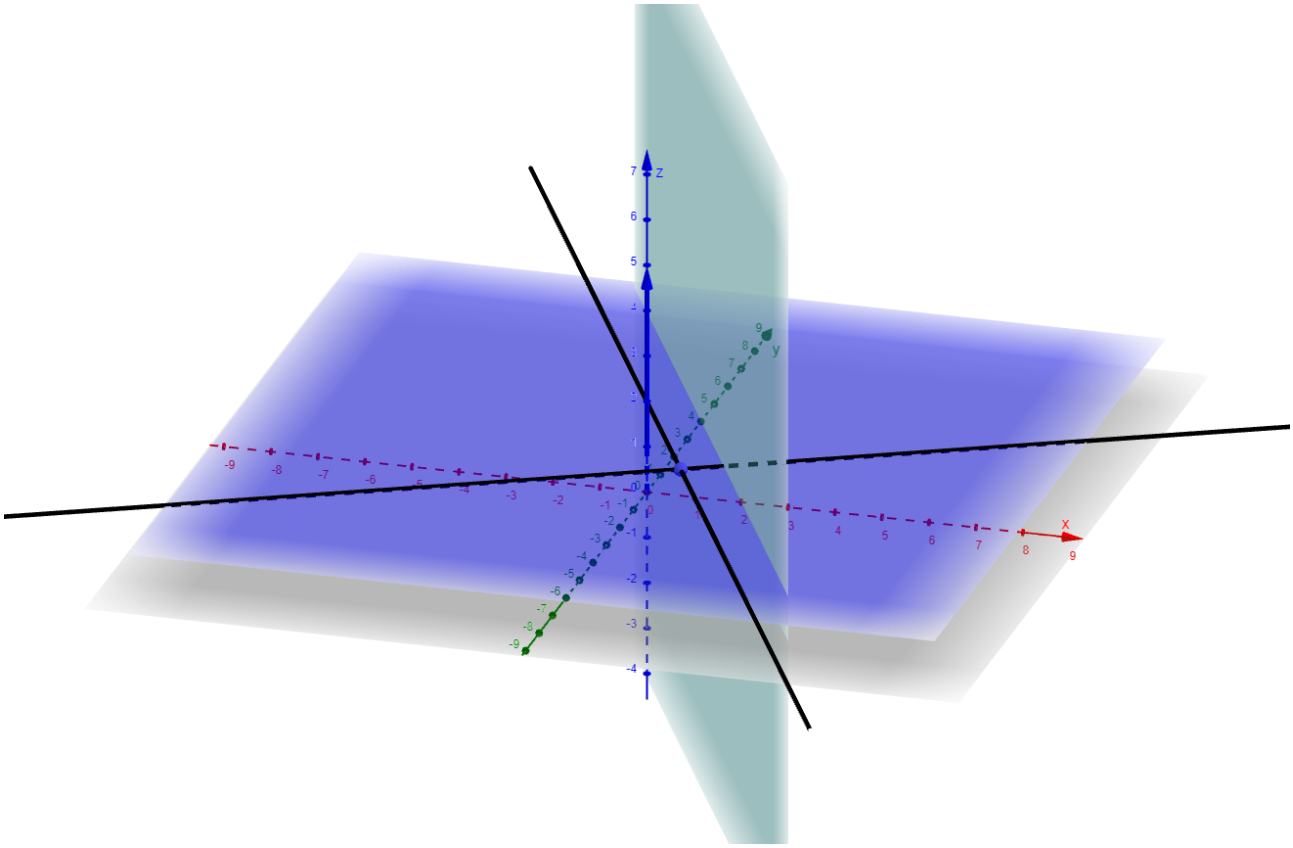
3.2 Dada la recta $r:\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1-2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x + y-3 = 0$

3.2.1 (1,25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r.

Para construir un plano se necesita un punto y dos vectores:

$$\begin{cases} P_r = P_\sigma = (1,-1,1) \\ \vec{n}_\pi = \vec{d}_\sigma = (2,1,0) \\ \vec{d}_r = (1,-2,0) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \sigma: z = 1$$



https://www.geogebra.org/classic/f8bqysyq

Pasos que seguir para construir en GeoGebra:

Paso 1: Introducir el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$

Paso 2: Hallar el vector normal del plano VectorNormal(p)

Paso3: Introducir la recta r de punto Pr, y vector director dr.

Paso 4: Hallar el plano perpendicular y que contiene a r. Perperdicular(Pr, dr, n π)

3.2.2 (1,25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r.

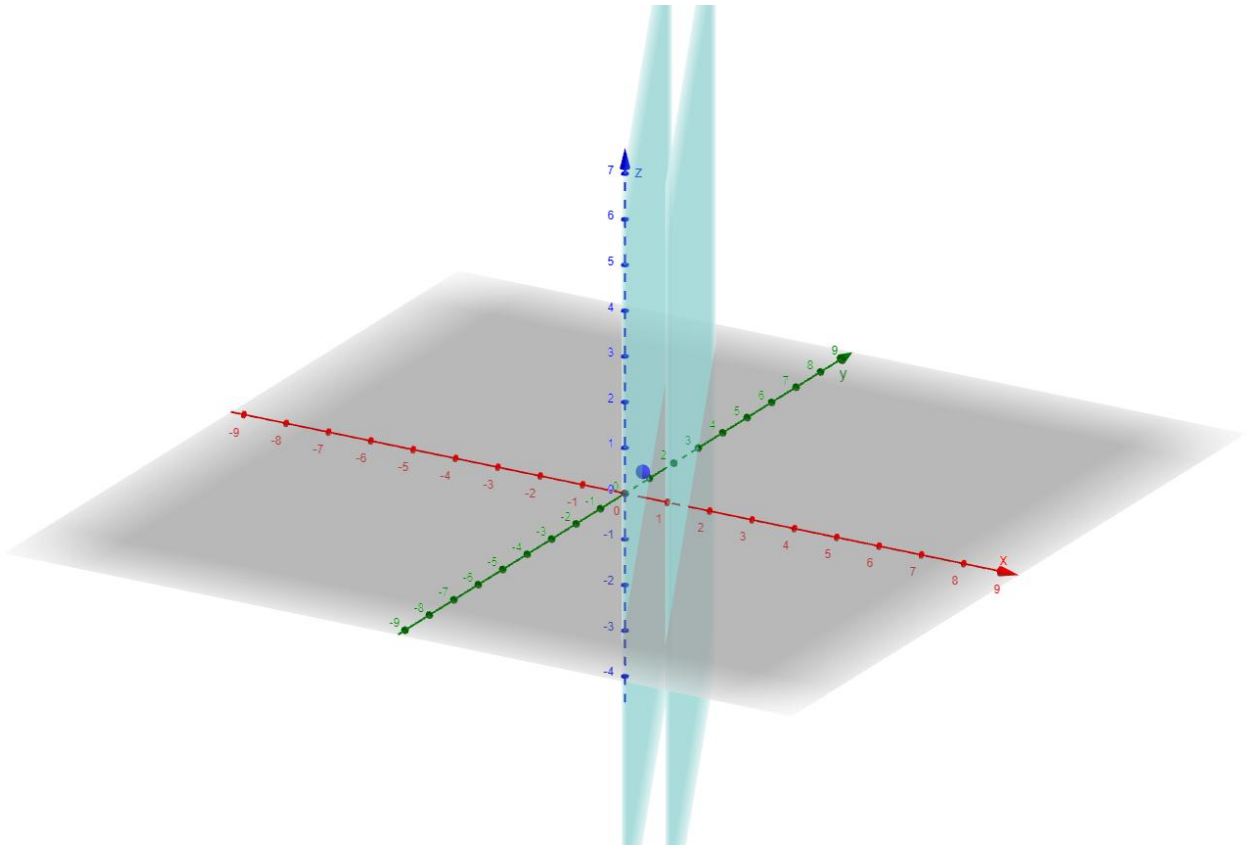
Si el plano es paralelo a $\boldsymbol{\pi}$, tendrá la misma ecuación, pero solo cambiará el término independiente.

$\pi: 2x + \mathrm{y}\text{-}3 = 0 \rightarrow \rho: 2x + \mathrm{y} + \mathrm{d} = 0$

y como el plano contiene la recta r, entonces Pr debe estar contenido en el plano

$$Pr \subset \rho \rightarrow 2 \cdot 1\text{-}1 + \mathrm{d} = 0 \rightarrow \mathrm{d} = \text{-}1$$

$\rho: 2x + \mathrm{y}\text{-}1 = 0$



Pasos que seguir para construir en GeoGebra:

Paso 1: Introducir el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$

Paso 2: Introducir el punto Pr

Paso 3: Hallar el plano paralelo y que contiene a r. Plano (Pr, π)

https://www.geogebra.org/classic/dtdw8swj

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

4.1 Considera la función $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$. Obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximo y mínimos, si existen. Dibuja $f(x)$

Paso 1: Estudiar el dominio de $f(x)$

Dom f(x) = $\mathbb{R}$ (puesto que se trata de una función polinómica)

Paso 2: Hallar su derivada e igualar a 0.

Atención didáctica:

$f(x)$ es creciente en (a,b) si $f'(x) > 0, x\epsilon (a,b)$

$f(x)$ es de creciente en (a,b) si $f'(x) < 0, x\epsilon (a,b)$

$f'(x) = 4x^3\text{-}14x = x\cdot(4x^2 - 14) = \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{14/4} = \pm\sqrt{7/2} \end{matrix}$

		$-\sqrt{7/2}$		0		$\sqrt{7/2}$
f(x)	↘		↗		↘	↗
f'(x)	-		+		-	+
		mínimo		máximo		mínimo

$(-\infty, -\sqrt{7/2}) - 2;\ f'(-2) = (-2)\cdot(4\cdot(-2)^2 - 14) = -4 < 0$

$(-\sqrt{7/2}, 0)$ -1; $f'(-1) = (-1)\cdot(4\cdot(-1)^2 - 14) = 10 > 0$

$(0, \sqrt{7/2})$ 1; $f'(1) = (1)\cdot(4\cdot(1)^2 - 14) = -10 < 0$

$(\sqrt{7/2}, +\infty)$ 2; $f'(2) = (2)\cdot(4\cdot(2)^2 - 14) = 4 > 0$

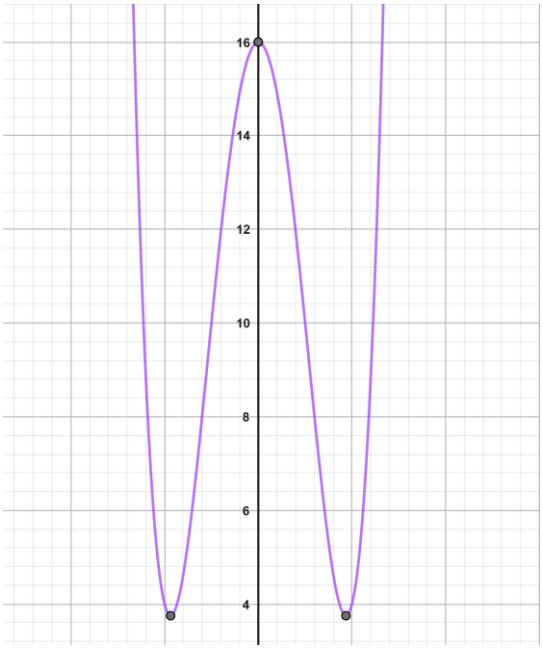
$\boldsymbol{f(x)\ es\ creciente\ en}\ (-\sqrt{7/2}, 0) \cup (\sqrt{7/2}, +\infty)$

$\boldsymbol{f(x)\ es\ decreciente\ en}\ (-\infty, -\sqrt{7/2}) \cup (0, \sqrt{7/2})$

Hay un mínimo en $x = (-\sqrt{7/2}, 3.75)$, $x = (\sqrt{7/2}, 3.75)$

$f(-\sqrt{7/2}) = 3.75\ f(\sqrt{7/2}) = 3.75$

Hay un máximo en $x = (0, f(0) = 3.75)\ f(0) = 16$



4.1.1 (1.25 puntos) Los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ y el área comprendida entre ambas curvas.

Se trata de resolver un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^4 - 7x^2 + 16 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x^2 = t} \rightarrow x^2 \cdot x^2 - 8x^2 + 16 = 0 \rightarrow t \cdot t - 8t + 16 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 16 = 0$$

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 16 \end{cases}$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (16)}}{2 \cdot (1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = 4$$

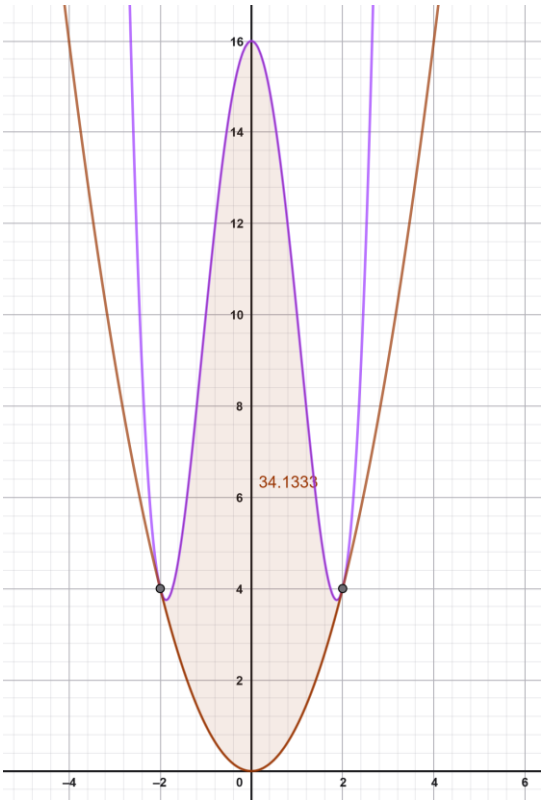
$\boldsymbol{x^2 = t} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Puntos de corte son:

$p = (2, g(2)) = (2,4)$

$q = (-2, g(2)) = (-2,4)$

Si representamos las dos gráficas en un mismo eje de coordenadas se observará mucho mejor el área que me solicitan.



$$\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x^4 - 7x^2 + 16 - x^2\,dx =$$

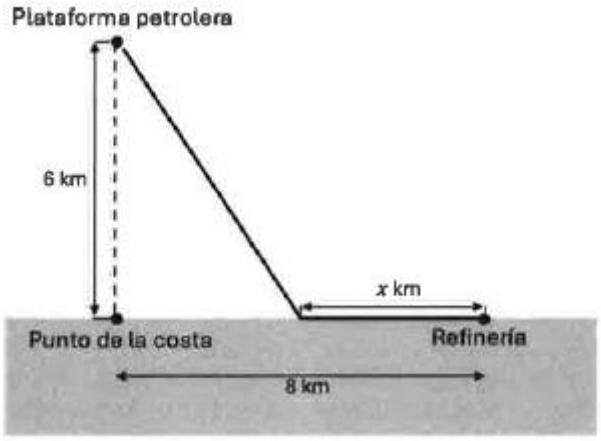
$$= \int_{-2}^{2} x^4 - 8x^2 + 16\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{8x^2}{3} + 16x \Big]_{-2}^{2} =$$

$$= \left| \left(\frac{(-2)^5}{5} - \frac{8 \cdot (-2)^2}{3} + 16 \right) - \left(\frac{(2)^5}{5} - \frac{8 \cdot (2)^2}{3} + 16 \right) \right| =$$

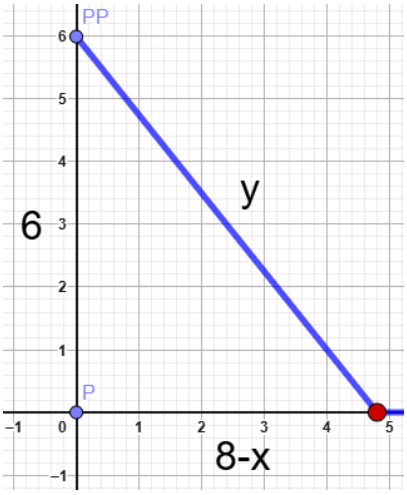
$=34.133$ u

https://www.geogebra.org/classic/kvskscge

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto O. Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



4.2.1 (0.5 puntos) Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x, entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.



Si aplicamos el teorema de Pitágoras nos queda:

$$y^2 = 6^2 + (8\text{-}x)^2 = 36 + 64\text{-}16x + x^2 = x^2\text{-}16x + 100 \rightarrow y = \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}$$

Así pues, el coste de construir el oleoducto (em millones de euros) es:

$$C(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100} + 0.6 \cdot x$$

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

$$C(x) = 1 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100} + 0.6 \cdot x$$

$$C'(x) = \frac{2x\text{-}16}{2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}} + 0.6 = \frac{2x\text{-}16 + 0.6 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}}{2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}} = 0$$

$$2x - 16 + 1.2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100} = 0$$

$$2x - 16 = \text{-}1.2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}$$

$$(2x - 16)^2 = \left(\text{-}1.2 \cdot \sqrt{x^2\text{-}16x + 100}\right)^2$$

$$4x^2\text{-}64x + 256 = 1.44 \cdot (x^2\text{-}16x + 100)$$

$$4x^2\text{-}1.44x^2\text{-}\,64x \;+\; 23.04x + 256\text{-}144 = 0$$

$$2.56x^2\text{-}40.96x + 112 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 3.5 & \text{solución} \\ x_2 = 12.5 & \text{No puede ser} \end{matrix}$$

	0	3.5	8
f(x)	↘		↗
f'(x)	-		+
		mínimo	

$(0\ ,3.5)\ 1;\ f'(1) = 2.56 \cdot 1^2\text{-}40.96 \cdot 1 + 112 =$

$(3.5{,}8\ )\ 4;\ f'(4) = (1) \cdot (4 \cdot (1)^2 - 14\ ) = \text{-}10 < 0$

$\boldsymbol{f(x)\ es\ creciente\ en}\ (3.5{,}8)$

$\boldsymbol{f(x)\ es\ decreciente\ en}\ (0{,}3.5)$

Hay un mínimo en $x = (3.5{,}9.6\ )$

$$c(3.5) = 9.6$$

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

$$c(3.5) = 9.6 \text{ millones de euros.}$$

El coste del oleoducto será de 9.6 millones de euros.

https://www.geogebra.org/classic/ygfand75