

Problemas – Tema 4

CCSS Problemas resueltos - 9 - aplicar inversa para resolver ecuaciones matriciales

1. Despeja X de la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C y D matrices cuadradas invertibles.

Recordamos que una matriz multiplicada por su inversa da la matriz identidad $\rightarrow AA^{-1} = I$

Recordamos que una matriz multiplicada por la matriz identidad, resulta la propia matriz $\rightarrow AI = A$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que por lo general $\rightarrow AB \neq BA \rightarrow$
Por lo que al multiplicar matrices debemos tener muy claro el lado por donde aplicamos la inversa.

Más cosas: la inversa de un producto resulta $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Ojo que cambia el orden de las matrices cuando el operador inversa actúa sobre cada término del producto.

Y por Dios... que nadie divida matrices. La división de matrices no está definida.

Con todo esto a modo de repaso, resolvemos.

$$X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B) \rightarrow \text{Aplico por la derecha la inversa de } (CD)^{-1}$$

$$X(CD)^{-1}CD = [A + X(D^{-1}C^{-1} - B)]CD \rightarrow XI = [A + X(D^{-1}C^{-1} - B)]CD$$

Donde I es la matriz identidad.

$$X = ACD + X(D^{-1}C^{-1} - B)CD \rightarrow X = ACD + (XD^{-1}C^{-1} - XB)CD$$

$$X = ACD + XD^{-1}C^{-1}CD - XBCD$$

Es fundamental aplicar los productos en el orden correcto.

$$X = ACD + XD^{-1}ID - XBCD \rightarrow X = ACD + XD^{-1}D - XBCD$$

$$X = ACD + XI - XBCD \rightarrow X = ACD + X - XBCD \rightarrow 0 = ACD - XBCD$$

Donde 0 es la matriz nula.

$$XBCD = ACD \rightarrow XBCDD^{-1} = ACDD^{-1} \rightarrow XBC = AC \rightarrow XBC C^{-1} = ACC^{-1}$$

$$XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$$

Resumiendo: tenemos que ir aplicando matrices inversas, sin equivocarnos de lado de aplicación. Y cuando coincida una matriz y su inversa, cancelan como la matriz identidad.

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar, si existe, la matriz inversa de A .

b) Determine, si existe, la solución X de la ecuación matricial $A = A \cdot X \cdot A^{-1} + B$

a) Aplicamos método directo:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5c & 3b+5d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término, y formamos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, que puede descomponerse en dos sistemas 2x2.

$$\begin{cases} 3a+5c=1 \\ 3b+5d=0 \\ a+2c=0 \\ b+2d=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+5c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a+5c=1 \\ -3a-6c=0 \end{cases} \rightarrow -c=1 \rightarrow c=-1 \rightarrow a-2=0 \rightarrow a=2$$

$$\begin{cases} 3b+5d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3b+5d=0 \\ -3b-6d=-3 \end{cases} \rightarrow -d=-3 \rightarrow d=3 \rightarrow 3b+15=0 \rightarrow b=-5$$

Por lo tanto $\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = A \cdot X \cdot A^{-1} + B \rightarrow A - B = A \cdot X \cdot A^{-1} \rightarrow A^{-1}(A - B) = X \cdot A^{-1} \rightarrow A^{-1}(A - B)A = X$

Sustituimos las matrices y operamos:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 61 \\ -19 & -33 \end{pmatrix}$$