

Peak District Cable, una nova companyia amb grans ambicions però poc pressupost, vol estendre una xarxa de cables de fibra òptica per connectar les tres ciutats britàniques de Loughborough, Stoke-on-Trent i Rotherham. La distància entre dues ciutats és sempre la mateixa 75 km.

Imagina que ets el director de projectes de l'empresa, dissenya el pla d'actuació per dur a terme la xarxa argumentant la teva estratègia.

El director general de l'empresa ha demanat a dos enginyers que dissenyin un pla d'actuació i la resposta ha estat:

Resposta del senyor Line:

Com que les rectes són els camins més curts entre punts el millor pla d'actuació és triar una de les ciutats i unir-la a les altres mitjançant cables rectes. La ciutat a escollir és senzilla, considerem el triangle format per les 3 ciutats, descartem el costat més llarg i instal·lem cable als altres dos. En aquest cas com que les tres ciutats estan separades per la mateixa distància no importa quina ciutat unim a les altres dues i la xarxa tindrà 150 km de cable.

Resposta del senyor Steiner:

Afegint una 4 ciutat a la xarxa aquesta és més curta que si unim només les tres ciutats.

Dins de les valls de Derbyshire hi ha la ciutat de Middleton situada aproximadament al centre del triangle a 44 km de les tres ciutats. La proposta és unir aquesta ciutat amb les altres 3 de manera que el cable necessari és $44 \times 3 = 132$ km

El director general tria l'opció de Steiner, però realment pot existir una ciutat a 44 km de les altres 3? Comprovem amb el GeoGebra si això és possible.

Podria existir una xarxa més petita que la proposada? Quants km de cable tindria? Quin percentatge d'estalvi representa la xarxa de Steiner respecte la de Line?

Punts de Steiner experimentant amb sabó i GeoGebra

El sabó disminueix la tensió superficial de l'aigua i permet formar làmines (bombolles), és per això que sempre busca la superfície mínima.

Pensem ara que les tres ciutats són tres claus ficats entre dos làmines transparents, submergirem les làmines en aigua amb sabó per tal que es formi la xarxa que uneix les ciutats. Què succeeix?

Ara que ja hem comprovat que efectivament el punt de Steiner fa mínima la xarxa anem a trobar aquest punt analíticament.

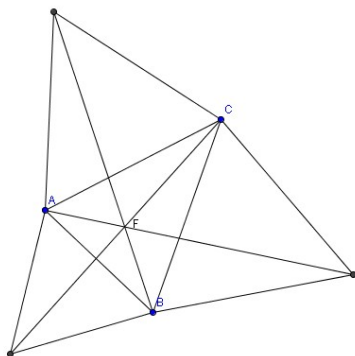
Aquest punt és vàlid siguin quines siguin les distàncies entre les ciutats, es a dir no cal que siguin equidistants. Però nosaltres per facilitar els càlculs pensem que les ciutats formen un triangle isòsceles.

Concretament i amb el canvi d'escala convenient podem pensar que les ciutats estan a les coordenades $A = (-1,0)$ $B = (1,0)$ $C = (0,1)$

Situa aquests punts en uns eixos de coordenades. En quina recta estarà el punt de Steiner?

Planteja ara el problema com un problema d'optimització amb la condició que el punt de Steiner ha d'estar a la recta que has trobat abans.

Ara que ja hem solucionat el problema en el cas d'un triangle isòsceles, podríem plantejar-nos fer-ho en general. Per això cal saber quina és la condició del punt de Steiner. Aquest punt geomètricament s'anomena punt de Fermat i la seva construcció geomètrica és:



El cas general de tres ciutats és relativament fàcil de solucionar analíticament, però si tenim més ciutats el problema es complica molt. Geomètricament i amb ajuda del GeoGebra és fàcil construir un simulador com l'utilitzat per tres ciutats.

Construeix un simulador per trobar la xarxa de comunicació mínima entre 4 ciutats. S'han de poder moure tant les ciutats inicials com els punts auxiliars. El simulador ha de donar la longitud total de la xarxa sense afegir cap punt i també la longitud total afegint els dos punts corresponents.

L'alcalde de Cardedeu per tal de reduir l'impacte mediambiental que produeixen els vehicles vol posar en marxa una prova pilot de xarxa de metro sostenible al municipi. Per començar vol comunicar les 4 ubicacions següents:

Ajuntament, institut El Sui, institut Pla Marcell, Pavelló d'esports.

S'ha obert un concurs públic per tal d'assignar el projecte. Per tal de participar s'ha de fer un pla de viabilitat del projecte on s'han d'especificar els kilòmetres necessaris de túnel, el número d'estacions mínimes necessàries i el número de línies si s'escau, així com el traçat de la xarxa.

S'atorgara el projecte al pla de viabilitat que comuniqui les quatre zones amb menys impacte al subsol.

Imagina que la teva empresa Peak Distric Cable està interessada en participar i et demana que elaboris un pla de viabilitat per presentar a concurs públic. Fes aquest pla utilitzant el Google Maps o similar i argumentant al màxim totes les eleccions que facis.