Kapitel 3: Grundlegende Anwendung der Differenzialrechnung

Aufgabe 3.1

Grundlegende Aufgabentypen

Wiederholen Sie die bisher gelernten Zusammenhänge hinsichtlich der Steigung von Kurven, indem Sie die folgenden Sätze vervollständigen.

In einem Berührpunkt x_0 haben eine Funktion f(x) und ihre Tangente immer die ______________ Steigung. Wenn man den Wert x_0 in die Gleichung der Funktion f(x) einsetzt, erhält man den ________________________. Wenn man den Wert x_0 in die Gleichung der Ableitungsfunktion f′(x) einsetzt, erhält man den Wert der ________________________ der Funktion und der Tangente an der Stelle x_0.

Dieser Zusammenhang zwischen der Steigung einer Kurve, der Steigung einer Tangente und dem Wert der Ableitungsfunktion spielt in vielen Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung eine zentrale Rolle. Prägen Sie sich daher die Inhalte im folgenden Kasten gut ein.

Steigung m der Funktion f(x) an der Stelle x_o	⇔	**Steigung m_t der Tangente der Funktion f(x) an der Stelle x_o**	⇔	**Funktionswert der ersten Ableitung von f(x) an der Stelle x_o, also $f'(x_o) = m$ bzw. $f'(x_o) = m_t$**

Information 3.1

Die Aufgabenstellungen bei der Anwendung der Differenzialrechnung führen im Wesentlichen auf zwei Aufgabentypen, die im Rahmen dieser Unterlagen mit Typ 1 und Typ 2 bezeichnet werden sollen. Verdeutlichen Sie sich die folgende Abbildung.

Überblick grundlegende Aufgabentypen bei der Anwendung der Differenzialrechnung

Die Funktion **f(x)** ist **gegeben.**
Die Ableitung f ′(x) wird berechnet.

Typ 1

gegeben: $x = x_0$
gesucht: **Steigung** m an der Stelle $x = x_0$
Ansatz: x_0 in die erste Ableitung einsetzen
$m = f'(x_0)$

Typ 2

gegeben: m
gesucht: **Stelle** x_0 mit der Steigung m
Ansatz: f′(x) mit m gleichsetzen: $f'(x) = m$
Entstandene Gleichung nach x auflösen. (x entspricht x_0)

wenn gefordert

y-Wert durch Einsetzen von x_0 in die Ausgangsfunktion f(x) berechnen.
$y = f(x_0)$

Aufgabe 3.2

Beispiel zu den grundlegenden Aufgabentypen der Differenzialrechnung

Verdeutlichen Sie sich das folgende Beispiel zu den Aufgabentypen 1 und 2 und bearbeiten Sie die nachfolgenden Übungen.

Beispiel:

Gegebene Funktion: $\mathbf{3f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x}$

1. Ableitung: $\mathbf{f'(x) = x + 1}$

Aufgabenstellung Typ 1:

Berechnen Sie die Steigung der Funktion f(x) an der Stelle x = 2

Damit ist die Stelle x gegeben mit: $x = 2$

Ansatz:

Einsetzen von 2 in die erste Ableitung f '(x) liefert die Steigung m der Funktion an der gegebenen Stelle bzw. die Tangenensteigung m_t.

$f'(2) = 2+1$

$f'(2) = 3$ (also $m = 3$)

y–Wert berechnen (nur wenn gefordert)

$y = f(2) = \frac{1}{2}2^2 + 2 = 4$

Antwortsatz:

Die Funktion f(x) hat im Punkt P(2/4) die Steigung 3

Aufgabenstellung Typ 2:

Ermitteln Sie die Stelle, an der die Funktion f(x) die Steigung 5 hat.

Damit ist die Steigung gegeben mit: $m = 5$

Ansatz:

Gleichsetzen von f '(x) mit m, denn die Steigung entspricht dem Funktionswert der ersten Ableitung (s. Kasten oben). Auflösen der entstandenen Gleichung nach x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= m \\ f'(x) &= 5 \\ x + 1 &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

y–Wert berechnen (nur wenn gefordert)

$y = f(4) = \frac{1}{2}4^2 + 4 = 12$

Antwortsatz:

Die Funktion f(x) hat im Punkt P(4/12) die Steigung 4