

# Schwerpunktaufgaben zur Vorbereitung auf die Leistungsfeststellung

1. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Verfahrens. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Taschenrechner.

$$\begin{array}{rccccrcr} 23a & +9b & +c & +d & = & 16 \\ 15a & +5b & -c & & = & -30 \\ -28a & -2b & +2c & +d & = & 46 \\ -12a & -6b & -2c & & = & -6 \end{array}$$

Skizzieren Sie anschließend die Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

in einem geeigneten (!) Koordinatensystem unter Zuhilfenahme charakteristischer Punkte (Nullstellen, Extrema, Schnittpunkt mit y-Achse u.a.) und sinnvoller Achseneinteilung!

*Schwerpunkte: Gauß-Algorithmus, Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Termumformung*

2. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = x^4 - 4,5x^2 + 5,0625$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .
- Untersuchen Sie die Funktion  $f(x)$  auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Aussage.
  - Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion  $f(x)$  im Unendlichen (positiv und negativ).
  - Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie Nullstellen der Funktion  $f(x)$ .
  - Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von  $f(x)$  in einem geeigneten Koordinatensystem unter Zuhilfenahme der oben ermittelten Punkte und einer Wertetabelle. Ihr Koordinatensystem sollte mindestens das Intervall  $-2 < x < 2$  abdecken.
  - Welche Funktionswerte besitzt die Funktion  $f(x)$  jeweils am Rand des unter d) angegebenen Intervalls?
  - Berechnen Sie alle Schnittpunkte der Funktion  $f(x)$  mit der Parabel mit der Funktionsgleichung  $g(x) = 2x^2 - 6x + 6,5$  mit  $x \in \mathbb{R}$ . Runden Sie sinnvoll auf 2 Nachkommastellen.

*Schwerpunkte: Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Symmetrie, Grenzwerte, Termumformung*

3. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 0,25 x^3 - 0,5 x^2 - 0,75 x + 1,5$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .

a. Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle:

$x$		-1,8		-1,7		1,8		2,1
$f(x)$	-1		0,00825		0,00825		0	

Welche begründete Aussage können Sie aufgrund der Wertetabelle, also ohne weitere Berechnungen, über die Nullstellen der Funktion  $f(x)$  machen?

- Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktion  $f(x)$  mit der  $y$ -Achse und alle Nullstellen.
- Untersuchen Sie die Funktion  $f(x)$  auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Aussage.
- Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion  $f(x)$  im Unendlichen (positiv und negativ).
- Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie Nullstellen der Funktion  $f(x)$ .
- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von  $f(x)$  in einem geeigneten Koordinatensystem unter Zuhilfenahme der oben ermittelten Punkte und einer Wertetabelle. Ihr Koordinatensystem sollte mindestens das Intervall  $-2 < x < 3$  abdecken.
- Welche Funktionswerte besitzt die Funktion  $f(x)$  jeweils am Rand des unter d) angegebenen Intervalls?

*Schwerpunkte: Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Symmetrie, Grenzwerte, Termumformung*

4. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus:

(I)	$32 a + 16 b + 8 c = -16$
(II)	$16 a + 6 b + 2 c = -2$
(III)	$24 a + 6 b + c = 0$
(IV)	$d = 4$
(V)	$e = 2$

Geben Sie die Funktionsgleichung von  $f(x) = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$  an und skizzieren Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. Geben Sie des Weiteren die Nullstellen und den Hochpunkt der Funktion an (auf zwei Nachkommastellen gerundet) und markieren diese in Ihrer Skizze. Begründen Sie, dass es sich um einen globalen Extrempunkt handelt.

*Schwerpunkte: Gauß-Algorithmus, Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung)*

5. Eine ganzrationale Funktion  $f(x)$  fünften Grades hat die Nullstellen 0, -1, 1, -2 und 2. Auf dem Graphen der Funktion liegt der Punkt  $P(3 | 120)$ .

- Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der oben beschriebenen Funktion  $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$  mit  $x \in \mathbb{R}$  ist.
- Untersuchen Sie die Funktion  $f(x)$  auf ihre Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
- Bestimmen Sie die Charakteristik des Krümmungswechsels am Wendepunkt und begründen Sie rechnerisch. Fertigen Sie für die Begründung eine Skizze an, die Ihre Begründung veranschaulicht (Skizze der Ausgangsfunktion und 2. Ableitung).
- Zeichnen Sie den Graphen von  $f(x)$  in ein kartesisches Koordinatensystem im Intervall  $-2 < x < 2$ . Markieren Sie alle charakteristischen Punkte, die Sie bei b) berechnet haben. Geben Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.
- Ermitteln Sie die Tangentengleichung an  $f(x)$  im Koordinatensprung.
- Bestimmen Sie die Normale zur Tangente aus Aufgabe e).

*Schwerpunkte: Funktionsuntersuchung (Differentialrechnung), Tangente und Normale*

6. Die untenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5 \text{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

- Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung  $0 = -0,5x^3 + 4,5x^2 - 12x + 7,5$  nur genau eine Lösung hat. Gehen Sie dabei auf folgende Stichworte ein: Verlauf einer Funktion 3. Grades, Nullstellen, Verhalten im Unendlichen und Extrema.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von  $f(x)$ . Welcher Krümmungswechsel liegt vor? Begründen Sie.

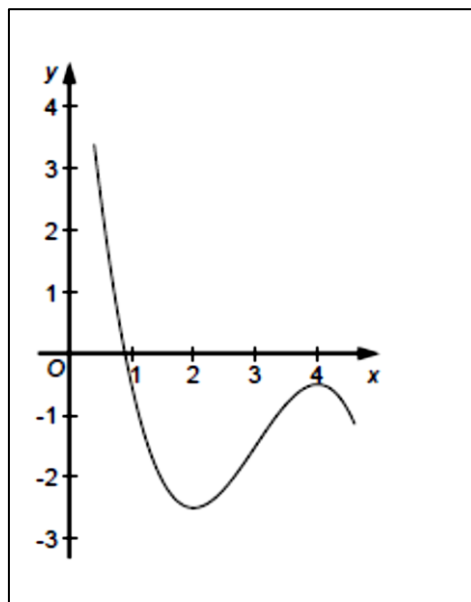


Abbildung 1 - Funktionsgraph von  $f(x)$

7. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 0,125 x^3 - 1,5 x + 2$  mit  $x \in \mathbb{R}$ .
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem.
  - Machen Sie eine Aussage zum Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen und begründen Sie diese rechnerisch.
  - Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion  $f(x)$  im Unendlichen.
  - Berechnen Sie alle Schnittpunkte mit der Ordinaten- und Abszissenachse.
  - Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte der Funktion  $f(x)$ .
  - Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes der Funktion  $f(x)$  und charakterisieren Sie den Krümmungswechsel. Begründen Sie rechnerisch.
  - Bestimmen Sie zeichnerisch den Schnittpunkt mit der Geraden  $g(x) = -1,5x + 3$ . Überprüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

8. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens:

(I)	$d = 105$
(II)	$2b = 0$
(III)	$1000000 a + 10000 b + 100 c + d = 5$
(IV)	$30000 a + 200 b + 1 c = -0,2$

Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse, wenn die oben berechneten Variablen a, b, c und d die Koeffizienten (in absteigender Reihenfolge) einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sind.

9. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(I)	$7x + 6y + 7z = 100$
(II)	$x - 2y + z = 0$
(III)	$3x + y - 2z = 0$

(I)	$4x + 3y + 2z = 10$
(II)	$4x + 9y - z = 58$
(III)	$x + 6y + 2z = 34$

(I)	$2x + 3y + z = 17$
(II)	$3x + y + 3z = 15$
(III)	$x + 3y + 3z = 13$

(I)	$9a + 5b + 4c = 21$
(II)	$6a + 3b - 5c = 7$
(III)	$3a - 10b + 6c = 35$